

Hauptprüfung Abiturprüfung 2022 - Leistungsfach
Baden-Württemberg

Wahlteil Analysis – Aufgabensatz 2

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

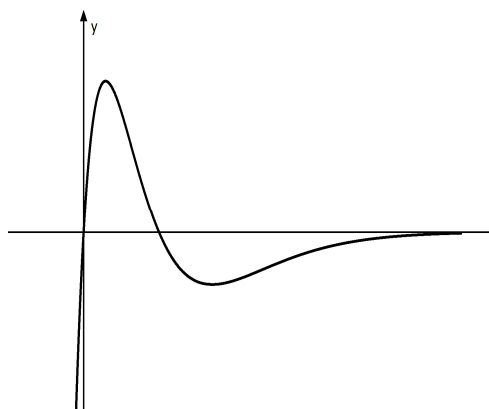
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2022

Aufgabe A 2.1 (13 VP)

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(t) = (2t - t^2) \cdot e^{2-t}$, die für $0 \leq t \leq 10$ die momentane Änderungsrate des Wasservolumens in einem Becken beschreibt (t in Stunden nach Beobachtungsbeginn, $f(t)$ in Kubikmeter pro Stunde).



- a) Geben Sie die momentane Änderungsrate des Wasservolumens eine Stunde nach Beobachtungsbeginn an. (0,5 VP)

Begründen Sie, dass das Wasservolumen in den ersten beiden Stunden nach Beobachtungsbeginn niemals abnimmt. (1,5 VP)

Die momentane Änderungsrate des Wasservolumens besitzt ein Minimum. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem dieses Minimum angenommen wird. (Teilergebnis: $t_{\min} = 2 + \sqrt{2}$) (2,5 VP)

Die Funktion F mit $F(t) = t^2 \cdot e^{2-t}$ ist eine Stammfunktion von f .
Zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn enthält das Becken 6m^3 Wasser.

- b) Ermitteln Sie das Wasservolumen, das sich zu Beobachtungsbeginn im Becken befand. (1,5 VP)

Es gibt einen 45-Minuten-Zeitraum, in welchem das Wasservolumen um genau einen Kubikmeter zunimmt. Geben Sie eine Gleichung an, deren Lösung den Beginn dieses Zeitraums darstellt. (1 VP)

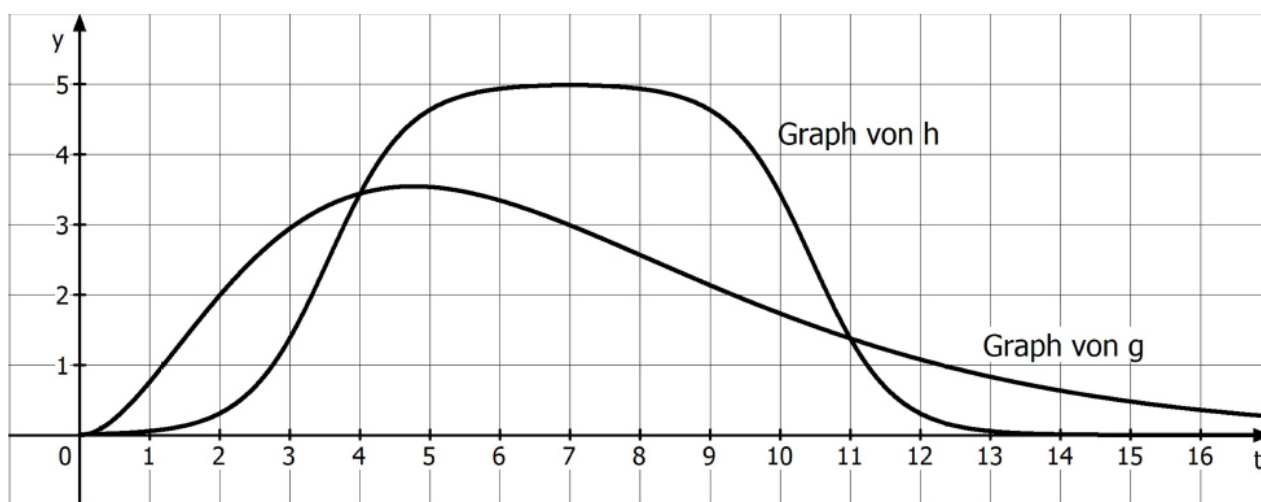
- c) Über eine Schaltuhr kann ein Zeitpunkt t_0 gewählt werden, so dass die momentane Änderungsrate des Wasservolumens nur bis t_0 durch die Funktion f beschrieben wird und danach konstant auf dem Wert $f(t_0)$ bleibt. Zeigen Sie, dass t_0 nicht so gewählt werden kann, dass das Becken sieben Stunden nach Beobachtungsbeginn leer ist. (2 VP)

Für ein anderes Becken beschreiben die Funktion g die momentane Zuflussrate und die Funktion h die momentane Abflussrate des Wassers in Abhängigkeit von der Zeit t ($0 \leq t \leq 17$, t in Stunden nach Beobachtungsbeginn, $g(t)$ und $h(t)$ in Kubikmeter pro Stunde). Die Abbildung zeigt die Graphen der beiden Funktionen g und h .

- d) Geben Sie den Zeitraum an, in dem das Wasservolumen in diesem Becken abnimmt. (0,5 VP)

Das abfließende Wasser wird in einem quaderförmigen Tank mit der Grundfläche 12m^2 gesammelt. Dieser ist zu Beobachtungsbeginn leer. Untersuchen Sie, ob das Wasser im Tank höher als 5m steigt. (2 VP)

Entscheiden Sie, ob das Becken zu Beobachtungsbeginn leer war, und begründen Sie Ihre Entscheidung. (1,5 VP)



Aufgabe A 2.2 (7 VP)

Für jede reelle Zahl $a \neq 0$ ist eine Funktion k_a gegeben durch $k_a(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2}$.

G_a ist der Graph von k_a .

- a) Geben Sie Gleichungen der Asymptoten des Graphen G_a an.

(1 VP)

Weisen Sie nach, dass für die Ableitung k_a' von k_a gilt: $k_a'(x) = \frac{2a-x}{x^3}$

(1,5 VP)

Zeigen Sie, dass jeder Graph G_a genau einen Extrempunkt besitzt, und untersuchen Sie, für welche Werte von a ein Hochpunkt vorliegt.

(2,5 VP)

- b) Jeder Graph G_a besitzt einen Punkt P_a mit der folgenden Eigenschaft:

Die Tangente im Punkt P_a an G_a verläuft durch den Ursprung.

Bestimmen sie die x-Koordinate von P_a .

(2 VP)

Lösungen**Aufgabe A 2.1**

- a) *Geben Sie die momentane Änderungsrate des Wasservolumens eine Stunde nach Beobachtungsbeginn an.*

$$f(t) = (2t - t^2) \cdot e^{2-t}$$

$$f(1) = 1 \cdot e \approx 2,7 \text{ Kubikmeter pro Stunde}$$

Begründen Sie, dass das Wasservolumen in den ersten beiden Stunden nach Beobachtungsbeginn niemals abnimmt.

Nullstellen von f : $f(t) = 0$

$$(2t - t^2) \cdot e^{2-t} = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

$$\text{I) } 2t - t^2 = 0 \Leftrightarrow t \cdot (2 - t) = 0 \quad \text{daraus folgt } t = 0 \text{ oder } t = 2$$

$$\text{II) } e^{2-t} = 0 \text{ ist nicht lösbar}$$

Die einzigen Nullstellen der Funktion f sind $t = 0$ und $t = 2$.

Der Abbildung entnimmt man, dass das Schaubild von f zwischen den Nullstellen oberhalb der t -Achse verläuft, also nimmt das Wasservolumen in den ersten beiden Stunden nie ab.

Die momentane Änderungsrate des Wasservolumens besitzt ein Minimum. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem dieses Minimum angenommen wird.

Notwendige Bedingung: $f'(t) = 0$

$$f'(t) = (2 - 2t) \cdot e^{2-t} + (2t - t^2) \cdot e^{2-t} \cdot (-1) = e^{2-t} \cdot (2 - 2t - 2t + t^2) = e^{2-t} \cdot (t^2 - 4t + 2)$$

$$e^{2-t} \cdot (t^2 - 4t + 2) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

$$\text{I) } e^{2-t} = 0 \text{ ist nicht lösbar}$$

$$\text{II) } t^2 - 4t + 2 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$t_1 = 2 - \sqrt{2} \approx 0,59 \quad \text{und} \quad t_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3,41$$

Der Abbildung entnimmt man, dass t_2 die Minimumstelle ist.

Etwa 3,4 Stunden nach Beobachtungsbeginn nimmt die Änderungsrate des Wasservolumens ihr Minimum an.

- b) *Ermitteln Sie das Wasservolumen, das sich zu Beobachtungsbeginn im Becken befand.*

Das Wasservolumen nach 2 Stunden wird wie folgt berechnet:

$$V(0) + \int_0^2 f(t) dt = 6$$

$$\Leftrightarrow V(0) + F(2) - F(0) = 6$$

Wegen $F(t) = t^2 \cdot e^{2-t}$ gilt $F(0) = 0$ und $F(2) = 4$.

$$V(0) + 4 - 0 = 6 \Leftrightarrow V(0) = 2$$

Zu Beobachtungsbeginn befanden sich 2m^3 Wasser im Becken.

Geben Sie eine Gleichung an, deren Lösung den Beginn dieses Zeitraums darstellt.

Der 45-Minuten-Zeitraum kann durch das Intervall $[t; t+0,75]$ dargestellt werden (t in Stunden).

Bedingung: $\int_t^{t+0,75} f(x) dx = 1$

Auflösung des Integrals ergibt $F(t+0,75) - F(t) = 1$

Das Wasservolumen wird mithilfe der Stammfunktion $F(t)$ beschrieben.

- c) *Zeigen Sie, dass t_0 nicht so gewählt werden kann, dass das Becken sieben Stunden nach Beobachtungsbeginn leer ist.*

Für den gesuchten Zeitpunkt muss $t_0 > 2$ gelten, da in den ersten 2 Stunden die momentane Änderungsrate positiv ist.

Nach 2 Stunden befinden sich in dem Becken 6 m^3 Wasser.

Wenn das Becken 7 Stunden nach Beobachtungsbeginn leer sein soll, müsste das Wasser im Zeitraum $[2;7]$ mit einer durchschnittlichen oder konstanten

Änderungsrate von $-\frac{6\text{m}^3}{5\text{h}} = -1,2\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$ abfließen.

Aus b) ergibt sich, dass nach $t_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3,41$ Stunden die momentane Abflussrate minimal ist.

Diese beträgt $f(2 + \sqrt{2}) \approx -1,17\text{ m}^3$ pro Stunde.

Da somit die erforderliche Abflussgeschwindigkeit von $-1,2\text{ m}^3/\text{h}$ überhaupt nicht erreicht werden kann, kann das Becken nicht nach 7 Stunden leer sein.

- d) *Geben Sie den Zeitraum an, in dem das Wasservolumen in diesem Becken abnimmt.*

Das Wasservolumen nimmt ab, solange das Schaubild von h oberhalb des Schaubildes von g liegt.

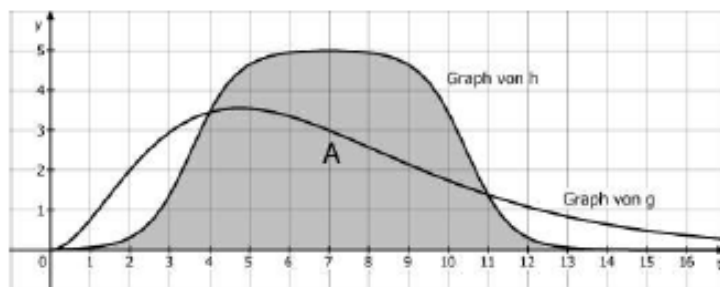
Dies gilt für den Zeitraum 4 Stunden bis 11 Stunden nach Beobachtungsbeginn.

Untersuchen Sie, ob das Wasser im Tank höher als 5m steigt.

Wenn das Wasser im Tank eine Höhe von 5m besitzt, befinden sich

$$V = 12\text{m}^2 \cdot 5\text{m} = 60\text{m}^3 \text{ Wasser darin.}$$

Die Menge des abfließenden Wassers entspricht dem Flächeninhalt zwischen dem Schaubild von h und der t -Achse.



1 Kästchen entspricht 1m^3 .

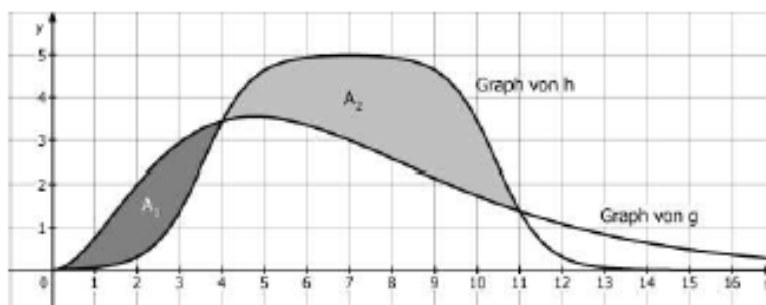
Da sich zwischen dem Schaubild von h und der t -Achse weniger als 60 Kästchen befinden, steigt das Wasser nicht höher als 5 Meter.

Entscheiden Sie, ob das Becken zu Beobachtungsbeginn leer war, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Der Inhalt der Fläche A_1 entspricht der Wasserzunahme in dem Becken in den ersten 4 Stunden.

Der Inhalt der Fläche A_2 entspricht der Wasserabnahme in dem Becken zwischen der 4. und 11. Stunde.

Da $A_2 > A_1$ ist, kann das Becken zu Beobachtungsbeginn nicht leer gewesen sein.



Aufgabe 2.2:

a) Geben Sie Gleichungen der Asymptoten des Graphen G_a an.

$$k_a(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2}$$

Da bei beiden Brüchen der Nennergrad größer als der Zählergrad ist, ist $y = 0$ die Gleichung der waagrechten Asymptote.

Da bei $x = 0$ eine Definitionslücke vorliegt, ist $x = 0$ die Gleichung der senkrechten Asymptote.

Weisen Sie nach, dass für die Ableitung k_a' von k_a gilt: $k_a'(x) = \frac{2a-x}{x^3}$.

$$k_a(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} = x^{-1} - a \cdot x^{-2}$$

$$k_a'(x) = -x^{-2} + 2a \cdot x^{-3} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2a}{x^3} = -\frac{x}{x^3} + \frac{2a}{x^3} = \frac{2a-x}{x^3} \quad \text{was zu zeigen war}$$

Zeigen Sie, dass jeder Graph G_a genau einen Extrempunkt besitzt, und untersuchen Sie, für welche Werte von a ein Hochpunkt vorliegt.

$$\text{Es gilt } k_a''(x) = 2x^{-3} - 6ax^{-4} = \frac{2}{x^3} - \frac{6a}{x^4}.$$

Bedingung für Extrempunkt: $k_a'(x) = 0$ und $k_a''(x) \neq 0$

$$\frac{2a-x}{x^3} = 0 \quad | \cdot x^3$$

$$\Leftrightarrow 2a - x = 0 \quad \Leftrightarrow x = 2a$$

$$k_a''(2a) = \frac{2}{(2a)^3} - \frac{6a}{(2a)^4} = \frac{2}{8a^3} - \frac{6a}{16a^4} = \frac{1}{4a^3} - \frac{3}{8a^3} = -\frac{1}{8a^3} \neq 0$$

Somit besitzt jeder Graph G_a genau einen Extrempunkt.

Für einen Hochpunkt muss gelten: $k_a''(2a) = -\frac{1}{8a^3} < 0$

Das ist der Fall für $a > 0$.

b) Bestimmen sie die x -Koordinate von P_a .

Allgemeine Tangentengleichung an der Stelle $x = u$:

$$y = k_a'(u) \cdot (x - u) + k_a(u)$$

Einsetzen des Punktes $O(0|0)$: $0 = k_a'(u) \cdot (0 - u) + k_a(u)$

$$0 = \frac{2a-u}{u^3} \cdot (-u) + \frac{1}{u} - \frac{a}{u^2} \quad | \cdot u^2$$

$$0 = -2a + u + u - a$$

$$\Leftrightarrow 2u = 3a$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{3}{2}a$$

Der Punkt P_a hat die x-Koordinate $\frac{3}{2}a$.