

Hauptprüfung Abiturprüfung 2022 - Leistungsfach
Baden-Württemberg

Wahlteil Analysis – Aufgabensatz 1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

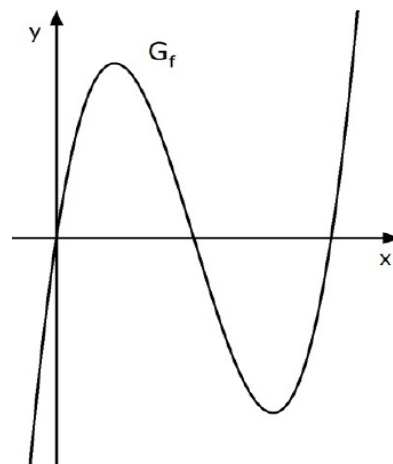
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2022

Aufgabe A 1.1 (13 VP)

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$.



- a) Berechnen Sie die Nullstellen von f . (1,5 VP)
Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes W von G_f . (1,5 VP)

Die Gerade t_1 ist die Tangente an G_f in W .
Zeigen Sie, dass $y = -4x + 8$ eine Gleichung von t_1 ist. (1 VP)

- b) Die Gerade t_2 ist die Tangente an G_f im Ursprung O . Die Geraden t_1 und t_2 schneiden sich im Punkt Q . Berechnen Sie für das Dreieck OWQ die Weite des Innenwinkels bei Q .

(2 VP)

Für ein $u > 0$ ist die Tangente an G_f im Punkt $B(u|f(u))$ parallel zu t_2 .

Bestimmen Sie den Wert von u . (1,5 VP)

- c) Die Funktion I_0 mit $I_0(x) = \int_0^x f(t) dt$ besitzt im Intervall $[0;4]$ ihren maximalen Wert an der Stelle x_0 . Geben Sie x_0 an und begründen Sie Ihre Angabe. (1,5 VP)

- d) Für die Funktion h mit $h(x) = x^3 - 4x$ gilt $f(x) = h(x - 2)$. Erläutern Sie, welche Symmetrieeigenschaft daraus für G_f folgt.

(1,5 VP)

- e) Der Graph G_{f^*} entsteht durch Spiegelung des Graphen G_f an der Geraden mit der Gleichung $x = a$. Die Tangente an G_{f^*} im Wendepunkt von G_{f^*} schneidet die y -Achse im Punkt $S(0|16)$. Bestimmen Sie den Wert von a .

(2,5 VP)

Aufgabe A 1.2 (7 VP)

Für jedes $a > 0$ ist die Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = a \cdot \sin(a \cdot \pi \cdot x)$.

Die zugehörigen Graphen werden mit G_a bezeichnet.

Der Punkt $H_a(\frac{1}{2a} | a)$ ist ein Hochpunkt von G_a .

- a) Geben Sie die Periode von f_a an. (0,5 VP)

Der Punkt H_a bildet mit den beiden von H_a am wenigsten weit entfernten Tiefpunkten von G_a ein Dreieck. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks unabhängig von a ist.

(2 VP)

- b) Ermitteln Sie den Wert von a , für den H_a vom Ursprung den Abstand 1 hat.

(2 VP)

- c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Kurve K , auf der alle Punkte H_a liegen.

(1 VP)

Auf K gibt es einen Punkt H_a , in dem die Tangente an K parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = -2x$ ist. Bestimmen Sie den Wert von a .

(1,5 VP)

Lösungen**Aufgabe A 1.1**

a) Berechnen Sie die Nullstellen von f .

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$$

$$\text{Bedingung: } f(x) = 0$$

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 6x + 8) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

$$\text{I) } x_1 = 0$$

$$\text{II) } x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 2$$

Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes W von G_f .

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$f'''(x) = 6$$

Hinreichende Bedingung für den Wendepunkt: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$f'''(2) = 6 \neq 0$, damit existiert bei $x = 2$ eine Wendestelle

Wegen $f(2) = 0$ ergibt sich als Wendepunkt $W(2|0)$.

Zeigen Sie, dass $y = -4x + 8$ eine Gleichung von t_1 ist.

Ansatz für die Tangentengleichung an der Stelle $x = 2$: $y = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2)$

Es gilt $f'(2) = 3 \cdot 4 - 12 \cdot 2 + 8 = -4$ und $f(2) = 0$.

Gleichung der Tangente: $y = -4(x - 2) + 0 \Leftrightarrow y = -4x + 8$ was zu zeigen war

b) Berechnen Sie für das Dreieck OWQ die Weite des Innenwinkels bei Q .

Zur Berechnung des Innenwinkels werden die Steigungen der beiden Tangenten benötigt.

Steigung von t_1 : $m_1 = -4$

Steigung von t_2 : $m_2 = f'(0) = 8$

Steigungswinkel der Tangente t_1 : $\tan(\alpha_1) = -4 \Rightarrow \alpha_1 \approx -76,0^\circ$

Steigungswinkel der Tangente t_2 : $\tan(\alpha_2) = 8 \Rightarrow \alpha_2 \approx 82,9^\circ$

Differenz der Steigungswinkel: $\alpha_2 - \alpha_1 = 82,9^\circ - (-76,0^\circ) = 158,9^\circ$

Somit ist $\alpha_3 = 180^\circ - 158,9^\circ = 21,1^\circ$ die Winkelweite bei Q.

Bestimmen Sie den Wert von u.

Bedingung: $f'(u) = 8$

$$3u^2 - 12u + 8 = 8 \Leftrightarrow 3u^2 - 12u = 0 \Leftrightarrow u(3u - 12) = 0 \quad \text{Satz vom Nullprodukt}$$

I) $u = 0$

II) $u = 4$

Wegen $u > 0$ gilt $u = 4$.

c) *Geben Sie x_0 an und begründen Sie Ihre Angabe.*

Die gesuchte Stelle ist $x_0 = 2$.

Begründung:

1.Möglichkeit:

Die Funktion I_0 ist eine Integralfunktion von f und damit eine spezielle Stammfunktion von f . Die Maximumstelle findet sich an der Nullstelle von f , an der ein Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ vorliegt. Dies ist bei $x = 2$ der Fall (siehe Aufgabe a)).

2.Möglichkeit:

Die Funktion I_0 beschreibt den orientierten Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x -Achse. Der Graph von f verläuft für $0 < x < 2$ oberhalb (Integralfunktion I_0 ist in diesem Intervall positiv) und für $2 < x < 4$ unterhalb der x -Achse (Integralfunktion I_0 ist in diesem Intervall negativ).

d) *Erläutern Sie, welche Symmetrieeigenschaft daraus für G_f folgt.*

Der Graph G_h von h ist punktsymmetrisch zum Ursprung, denn der Funktionsterm von h enthält nur Potenzen von x mit ungeraden Hochzahlen (Exponenten).

Das Schaubild G_f von f ist gegenüber G_h um 2 Einheiten nach rechts verschoben. Daher ist G_f punktsymmetrisch zu $W(2|0)$.

e) *Bestimmen Sie den Wert von a.*

Die Steigung der Wendetangente an das Schaubild von f ist $m = -4$.

Durch die Spiegelung des Schaubildes an der senkrechten Geraden $x = a$ ändert sich die Steigung der Wendetangente zu $m^* = 4$.

Da die Wendetangente an G_{f^*} durch $S(0|16)$ verläuft, ist die Gleichung der Wendetangente an G_{f^*} $y = 4x + 16$.

Durch die Spiegelung an der Geraden $x = a$ liegt der Wendepunkt W^* von G_{f^*} weiterhin auf der x -Achse.

Berechnung der Nullstelle der Wendentangente an G_{f^*} : $0 = 4x + 16 \Leftrightarrow x = -4$
Daher ist $W^*(-4|0)$ der Wendepunkt von G_{f^*} .

Der Wendepunkt von G_f ist $W(2|0)$.

Um die Wendestelle von $x = 2$ nach $x^* = -4$ zu bringen, muss der Punkt an der senkrechten Geraden $x = -1$ gespiegelt werden (Mittelwert von 2 und -4).
Daher ist $a = -1$.

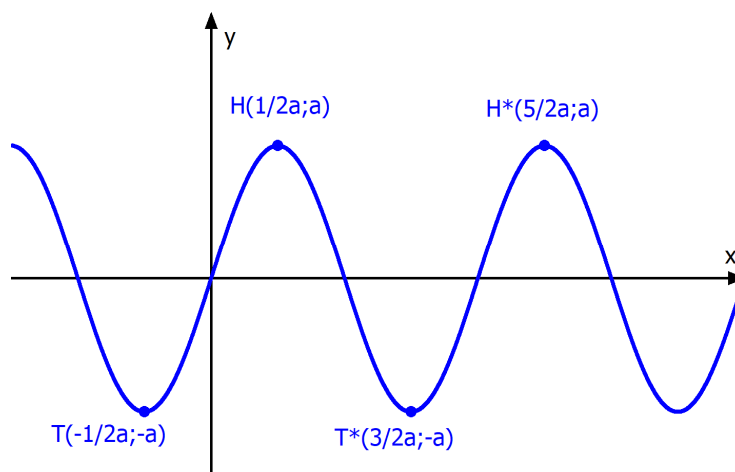
Aufgabe A 1.2

a) Geben Sie die Periode von f_a an.

$$\text{Periode } p = \frac{2\pi}{\pi \cdot a} = \frac{2}{a}$$

Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks unabhängig von a ist.

Skizze:



Gesucht ist der Flächeninhalt des Dreiecks T, T^*, H .

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \overline{TT^*} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2a} \cdot 2a = 2$$

Damit ist der Inhalt des Dreiecks unabhängig von a .

b) Abstand des Punktes $H\left(\frac{1}{2a} \mid a\right)$ vom Ursprung $O(0|0)$:

$$d(H_a, O) = \sqrt{\left(\frac{1}{2a}\right)^2 + a^2} = 1 \quad | \text{quadrieren}$$

$$\frac{1}{4a^2} + a^2 = 1 \quad | \cdot 4a^2$$

$$1 + 4a^4 = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow 4a^4 - 4a^2 + 1 = 0 \quad \text{Substitution } a^2 = u$$

$$4u^2 - 4u + 1 = 0$$

$$\text{abc-Formel: } u_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Rücksubstitution: } a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad (\text{da } a > 0 \text{ ist})$$

Probe, ob $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$ eine Lösung der Wurzelgleichung ist:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{0,5}}\right)^2 + \sqrt{0,5}^2} = 1 \quad \text{ist eine wahre Aussage.}$$

Der gesuchte Wert ist $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Kurve K , auf der alle Punkte H_a liegen.

Trennung der Koordinaten des Hochpunktes $H_a\left(\frac{1}{2a} \mid a\right)$:

$$x = \frac{1}{2a} \quad (*) \quad \text{und} \quad y = a \quad (**)$$

$$(*) \text{ nach } a \text{ auflösen: } a = \frac{1}{2x}$$

Einsetzen in $(**)$ ergibt die Gleichung von K : $y = \frac{1}{2x}$ mit $x > 0$ (wegen $a > 0$).

Bestimmen Sie den Wert von a .

Gleichung der Ortskurve: $k(x) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}x^{-1}$ mit $k'(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}$

Bedingung: $k'(x) = -2$: $-\frac{1}{2x^2} = -2 \Leftrightarrow -1 = -4x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$

Für $x_1 = \frac{1}{2}$ gilt $\frac{1}{2a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1$

Für $x_2 = -\frac{1}{2}$ gilt $\frac{1}{2a} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -1$

Wegen $a > 0$ ist $a = 1$.