

Hauptprüfung Abiturprüfung 2022 - Leistungsfach

Baden-Württemberg

Pflichtteil – Aufgabensatz 2

Hilfsmittel: keine

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2022

Aufgabe 1: (2,5 VP)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{0,5x^2}$.

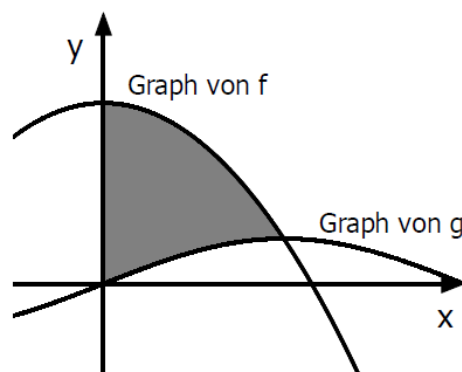
Bestimmen Sie den Wert der zweiten Ableitung von f an der Stelle $x_0 = 0$.

Aufgabe 2: (0,5 VP und 2 VP)

Abgebildet sind die Graphen der Funktionen f und g mit

$$f(x) = 4 - 3x^2 \text{ und } g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

- Zeigen Sie, dass sich die beiden Graphen an der Stelle $x_0 = 1$ schneiden.
- Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

**Aufgabe 3: (2,5 VP)**

Der Graph G_f der Funktion f besitzt den Tiefpunkt $T(1|-2)$. Der Graph der Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{9}x^3 - 3x$ entsteht, indem G_f um a Einheiten nach rechts und um b Einheiten nach unten verschoben wird. Bestimmen Sie die Werte von a und b .

Aufgabe 4: (2,5 VP)

Die Graphen einer Schar ganzrationaler Funktionen dritten Grades berühren die x -Achse im Punkt $O(0|0)$. Jeder Graph der Schar besitzt die Extremstelle $x_0 = -2$. Untersuchen Sie, ob alle Graphen der Schar den Punkt $P(-3|0)$ gemeinsam haben.

Aufgabe 5: (1 VP und 1,5 VP)

Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12$ und für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Gerade

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Bestimmen Sie den Wert von a , für den die Gerade g_a parallel zu E ist.
- Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist P_a der Schnittpunkt von g_a mit der x_1x_3 -Ebene.
Bestimmen Sie den Wert von a , für den P_a in E liegt.

Aufgabe 6: (1 VP und 1,5 VP)

Gegeben sind die parallelen Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

- a) Der Punkt $A(4|-3|0)$ liegt auf g . Weisen Sie nach, dass A derjenige Punkt auf g ist, der vom Punkt $B(0|-1|4)$ den kleinsten Abstand hat.
- b) Die Gerade h ist die Bildgerade von g bei einer Spiegelung an der Ebene E . Ermitteln Sie eine Gleichung von E .

Aufgabe 7: (1 VP und 1,5 VP)

Ein Glücksrad besteht aus einem gelben, einem blauen und einem roten Sektor. Wird das Glücksrad einmal gedreht, erscheint der gelbe Sektor mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ und der rote Sektor mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.

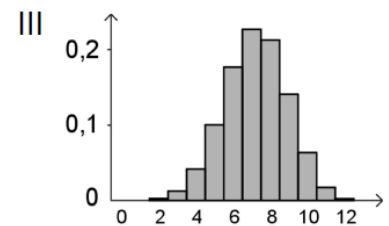
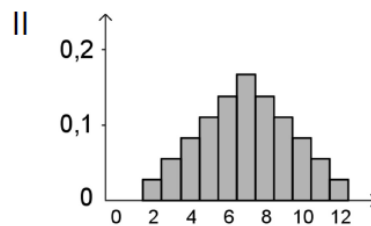
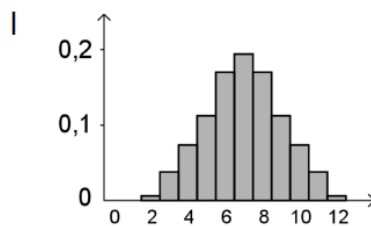
- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei zweimaligem Drehen der blaue Sektor zweimal erscheint.
- b) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment und ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit sich mit dem Term $\left(\frac{1}{3}\right)^5 + 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{2}{3}$ berechnen lässt.

Aufgabe 8: (1 VP und 1,5 VP)

Gegeben sind die im Folgenden beschriebenen Zufallsgrößen X und Y:

- Ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind, wird zweimal geworfen. X gibt die Summe der dabei gewürfelten Zahlen an.
- Aus einem Behälter mit 60 schwarzen und 40 weißen Kugeln wird zwölfmal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Y gibt die Anzahl der entnommenen schwarzen Kugeln an.

- a) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $P(X=4)$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(X=10)$ übereinstimmt.
- b) Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X und Y werden jeweils durch eines der folgenden Diagramme I, II und III dargestellt. Ordnen Sie X und Y jeweils dem passenden Diagramm zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.



Lösungen**Aufgabe 1:**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{0,5x^2}$

1. Ableitung (Kettenregel): $f'(x) = e^{0,5x^2} \cdot x$

2. Ableitung (Produkt- und Kettenregel): $f''(x) = e^{0,5x^2} \cdot x \cdot x + e^{0,5x^2} = e^{0,5x^2} \cdot (x^2 + 1)$

$$f''(0) = e^0 \cdot (0 + 1) = 1$$

Aufgabe 2:

a) Es gilt $f(1) = 4 - 3 \cdot 1^2 = 1$ und $g(1) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Da $f(1) = g(1)$ gilt, schneiden sich die Schaubilder an der Stelle $x = 1$.

b) Berechnung des Flächeninhalts:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 (4 - 3x^2 - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)) dx = \left[4x - x^3 + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \frac{2}{\pi} \right]_0^1 \\ &= 4 - 1 + 0 - (0 - 0 + 1 \cdot \frac{2}{\pi}) = 3 - \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

Berechnung des Tiefpunktes des Schaubildes der Funktion $g(x) = \frac{1}{9}x^3 - 3x$:

Bedingung: $g'(x) = 0$ und $g''(x) > 0$

Es gilt $g'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3$ und $g''(x) = \frac{2}{3}x$.

$$\frac{1}{3}x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$g''(-3) = -2 < 0 \Rightarrow \text{lokales Maximum}$$

$$g''(3) = 2 > 0 \Rightarrow \text{lokales Minimum, also existiert bei } x = 3 \text{ ein Tiefpunkt.}$$

Wegen $g(3) = -6$ hat der Tiefpunkt die Koordinaten $T_g(3 | -6)$.

Da das Schaubild von f den Tiefpunkt $T(1 | -2)$ besitzt, muss das Schaubild von f um 2 Einheiten nach rechts und um 4 Einheiten nach unten verschoben werden.
Daher ist $a = 2$ und $b = 4$.

Aufgabe 4:

Ansatz für die Funktionsgleichung: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Es gilt $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Bedingung:

$O(0|0)$ liegt auf dem Schaubild: $f(0) = 0 : d = 0$

Berührung in $O(0|0)$: $f'(0) = 0 : c = 0$

Extremstelle $x_0 = -2$: $f'(-2) = 0 : 12a - 4b + c = 0$

Da $c = d = 0$ ist bleibt als Gleichung $12a - 4b = 0$ übrig.
Daraus folgt $b = 3a$.

Die Funktionsgleichung mit dem Scharparameter a ausgedrückt werden:

$$f(x) = ax^3 + 3ax^2$$

Kontrolle, ob $P(-3|0)$ auf allen Graphen der Schar liegen:

$$f(-3) = 0.$$

Aufgabe 5:

- a) Die Gerade g_a ist parallel zu E , wenn der Richtungsvektor der Geraden orthogonal zum Normalenvektor von E ist.

$$\text{Bedingung: } \begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2a - 15 + 16 = 0 \Leftrightarrow a = -0,5$$

- b) Der Schnittpunkt von g_a mit der x_1x_3 -Ebene hat die Struktur $(x_1 | 0 | x_3)$

$$\text{Einsetzen in die Geradengleichung: } \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aus der 2. Zeile folgt $0 = 5 - 5t \Leftrightarrow t = 1$

Daraus folgt $x_1 = -1 + a$ und $x_3 = -1$.

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $P_a(-1+a | 0 | -1)$.

$$\begin{aligned} \text{Einsetzen von } P_a \text{ in } E: 2 \cdot (-1+a) + 3 \cdot 0 - 4 \cdot (-1) &= 12 \\ -2 + 2a + 4 &= 12 \Leftrightarrow a = 5 \end{aligned}$$

Der gesuchte Wert ist $a = 5$.

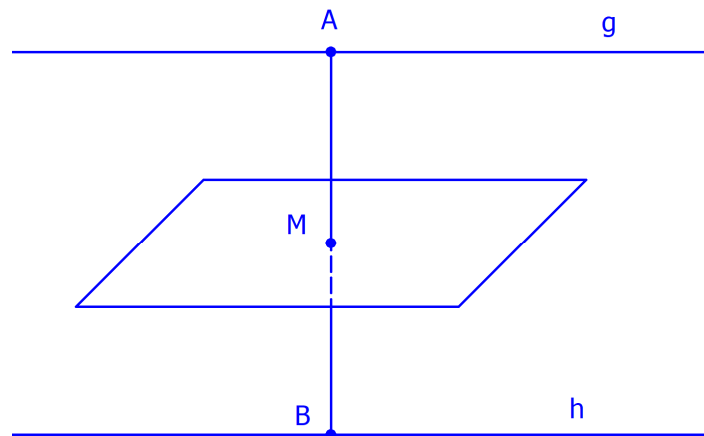
Aufgabe 6:

- a) Der Punkt $A(4|-3|0)$ auf g hat vom Punkt $B(0|-1|4)$ den kleinsten Abstand, wenn der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ senkrecht auf der Gerade g (also auf dem Richtungsvektor von g) steht.

Kontrolle: $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = -4 + 8 - 4 = 0$ was zu zeigen war

- b) Die Geraden g und h sind parallel.

Skizze unter Einbezug der Informationen aus a):



Der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ liegt auf der Ebene:

$$M\left(\frac{4+0}{2} \mid \frac{-3-1}{2} \mid \frac{0+4}{2}\right), \text{ also } M(2|-2|2)$$

Normalenvektor von E : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Koordinatengleichung von E : $-4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = d$

Einsetzen von M ergibt $-8 - 4 + 8 = d$, also $d = -4$.

$E: -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -4$

Aufgabe 7:

- a) Die Wahrscheinlichkeit für den blauen Sektor beträgt $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

$$P(bb) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

- b) Der Term $\left(\frac{1}{3}\right)^5$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass man bei fünfmaligem Drehen 5mal der gelbe Sektor erscheint.

Der Term $5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{2}{3}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass man bei fünfmaligem Drehen 4mal der gelbe Sektor erscheint (Bernoulli-Formel).

Fazit: Der angegebene Term gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass man bei fünfmaligem Drehen mindestens 4mal der gelbe Sektor erscheint.

Aufgabe 8:

- a) $P(X=4)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der gewürfelten Zahlen 4 beträgt.

Die Summe 4 ergibt sich für die drei Kombinationen 13, 22 und 31.

Somit ist die Wahrscheinlichkeit $P(X=4) = \frac{3}{36}$.

$P(X=10)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der gewürfelten Zahlen 10 beträgt.

Die Summe 10 ergibt sich für die drei Kombinationen 46, 55 und 64.

Somit ist die Wahrscheinlichkeit $P(X=10) = \frac{3}{36}$.

- b) Die Zufallsgröße Y ist binomialverteilt mit $n = 12$ und $p = \frac{60}{100} = 0,6$.

Da $p \neq 0,5$ ist, ist die Verteilung von Y nicht symmetrisch.

Somit kommt nur das Diagramm III in Frage.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist symmetrisch.

Die größte Wahrscheinlichkeit ist $P(X=7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, da folgende Kombinationen die Summe 7 ergeben: 16, 25, 34, 43, 52, 61

Da $\frac{1}{6} \approx 0,167$ ist, gehört Diagramm II zu X .

Bei Diagramm I besitzt die Säule an der Stelle $X=7$ eine Wahrscheinlichkeit von 0,2.

Andere Begründung:

Es gilt $P(X = 2) = \frac{1}{36}$ (wenn 11 gewürfelt wird) und $P(X = 3) = \frac{2}{36}$ (wenn 12 oder 21 gewürfelt wird).

Die Wahrscheinlichkeit $P(X=3)$ ist daher doppelt so groß wie $P(X=2)$, was bei Diagramm II passt und bei Diagramm I nicht.