

Hauptprüfung Abiturprüfung 2022

Baden-Württemberg

Teil 4: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2022

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

- 2 Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 her. Aus diesen Zwischenprodukten werden die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 hergestellt. Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist den folgenden Tabellen zu entnehmen.

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	1	2
Z_2	3	0	1
Z_3	1	4	2

	E_1	E_2	E_3
R_1	43	36	33
R_2	30	15	19
R_3	37	14	20

- 2.1 Für einen Auftrag sollen 400 ME von E_1 , 600 ME von E_2 und 500 ME von E_3 hergestellt werden.

- 2.1.1 Berechnen Sie, wie viele ME der drei Rohstoffe dafür benötigt werden.
(2 Punkte)

- 2.1.2 Für diesen Auftrag betragen die Fixkosten 2050 €, die gesamten Rohstoffkosten 400 € und die gesamten Fertigungskosten der Endprodukte betragen 1850 €. Die Fertigungskosten pro ME für Z_2 sind 2,5mal so hoch wie für Z_1 . Für Z_3 sind diese Kosten 1,25mal so hoch wie für Z_1 .

Die Verkaufspreise pro ME der Endprodukte betragen 20 € für E_1 und jeweils 35 € für E_2 und E_3 . Es wird ein Gewinn von 8000 € erwirtschaftet.

Bestimmen Sie die Fertigungskosten pro ME der drei Zwischenprodukte.
(5 Punkte)

- 2.2 Für einen weiteren Auftrag werden 4600 ME des Zwischenprodukts Z_1 , 3800 ME von Z_2 und 6250 ME von Z_3 hergestellt. Die Zwischenprodukte sollen für den Auftrag vollständig zu Endprodukten weiterverarbeitet werden, wobei 950 ME von E_1 produziert werden sollen.

Beurteilen Sie, ob dieser Auftrag ausführbar ist.
(3 Punkte)

- 2.3 Das Endprodukt E_3 wird zukünftig nicht mehr produziert. Im Lager befinden sich noch 30000 ME des Rohstoffs R_2 , die vollständig aufgebraucht werden müssen. Es sollen zudem nicht mehr als 1000 ME von E_1 produziert werden.

Ermitteln Sie, wie viele ME der Rohstoffe R_1 und R_3 mindestens bzw. höchstens im Lager vorhanden sein müssen.

(5 Punkte)

Lösungen

2.1.1 Rohstoff-Endprodukt-Matrix: $C = \begin{pmatrix} 43 & 36 & 33 \\ 30 & 15 & 19 \\ 37 & 14 & 20 \end{pmatrix}$

Berechnung der ME der Rohstoffe:

$$\begin{pmatrix} 43 & 36 & 33 \\ 30 & 15 & 19 \\ 37 & 14 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55300 \\ 30500 \\ 33200 \end{pmatrix}$$

Für den Auftrag benötigt man 55300 ME von R_1 , 30500 ME von R_2 und 33200 ME von R_3 .

2.1.2 Für die Gesamtkosten gilt die Formel $K_{\text{Ges}} = K_R + K_Z + K_E + K_{\text{Fix}}$
 Es gilt $K_{\text{Ges}} = 400 + K_Z + 1850 + 2050 = 4300 + K_Z$

Der Erlös beträgt $E = 20\text{€} \cdot 400 + 35\text{€} \cdot 600 + 35\text{€} \cdot 500 = 46500 \text{ €}$

Da der Gewinn 8000 € beträgt, ergibt sich

$$K_{\text{Ges}} = E - G = 46500 - 8000 = 38500$$

Daraus folgt $4300 + K_Z = 38500 \Leftrightarrow K_Z = 34200\text{€}$

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix: $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Berechnung des Zwischenproduktvektors:

$$\vec{z} = B \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2400 \\ 1700 \\ 3800 \end{pmatrix}$$

Der Kostenvektor für die Zwischenprodukte lautet $\vec{k}_Z = (z \quad 2,5z \quad 1,25z)$.

Bedingung:

$$K_Z = \vec{k}_Z \cdot \vec{z} = (z \quad 2,5z \quad 1,25z) \cdot \begin{pmatrix} 2400 \\ 1700 \\ 3800 \end{pmatrix} = 2400z + 4250z + 4750z = 11400z$$

Es gilt $11400z = 34200 \Leftrightarrow z = 3$

Fertigungskosten für Z_1 : 3 €Fertigungskosten für Z_2 : 7,50 €Fertigungskosten für Z_3 : 3,75 €2.2 Es gilt $B \cdot \vec{p} = \vec{z}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 950 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4600 \\ 3800 \\ 6250 \end{pmatrix}$$

Aus 2. Zeile: $2850 + p_3 = 3800 \Leftrightarrow p_3 = 950$

Aus 1. Zeile: $1900 + p_2 + 2p_3 = 4600 \Leftrightarrow 1900 + p_2 + 2 \cdot 950 = 4600$
 $\Leftrightarrow p_2 = 800$

Aus 3. Zeile: $950 + 4 \cdot 800 + 2 \cdot 950 = 6250$

Dies ist eine falsche Aussage.

Dieser Auftrag ist nicht ausführbar.

2.3 Es gilt $C \cdot \vec{p} = \vec{r}$

Da E_3 nicht mehr produziert wird, ist der dritte Eintrag des Produktionsvektors gleich 0.

$$\begin{pmatrix} 43 & 36 & 33 \\ 30 & 15 & 19 \\ 37 & 14 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 30000 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$43p_1 + 36p_2 = r_1$$

$$30p_1 + 15p_2 = 30000$$

$$37p_1 + 14p_2 = r_3$$

Das Gleichungssystem besitzt 3 Gleichungen und 4 Unbekannte.
 Daher existieren unendlich viele Lösungen.

Aus der 2. Zeile:

Setze $p_1 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$

$$30t + 15p_2 = 30000 \Leftrightarrow p_2 = 2000 - 2t$$

$$\text{Aus der 1. Zeile: } 43t + 36(2000 - 2t) = r_1 \Leftrightarrow r_1 = 72000 - 29t$$

$$\text{Aus der 3. Zeile: } 37t + 14(2000 - 2t) = r_3 \Leftrightarrow r_3 = 28000 + 9t$$

Wegen $p_1 \geq 0$ folgt $t \geq 0$.

Wegen $p_2 \geq 0$ folgt $2000 - 2t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 1000$.

Für $t = 0$ folgt $r_1 = 72000$

Für $t = 1000$ folgt $r_1 = 43000$

Daraus folgt $43000 \leq r_1 \leq 72000$.

Für $t = 0$ folgt $r_3 = 28000$

Für $t = 1000$ folgt $r_3 = 37000$

Daraus folgt $28000 \leq r_3 \leq 37000$.

Von R_1 werden mindestens 43000 ME und höchstens 72000 ME benötigt.

Von R_3 werden mindestens 28000 ME und höchstens 37000 ME benötigt.