

Hauptprüfung Abiturprüfung 2022

Baden-Württemberg

Teil 4: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2022

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

- 1 Vier verschiedene Stromanbieter A, B, C und D konkurrieren in einer Stadt um die dortigen 25200 Haushalte. Die Anzahl der Haushalte bleibt konstant. Jeder Haushalt ist an genau einen dieser Anbieter vertraglich gebunden. Verträge sind jeweils ein Jahr lang gültig. Die aktuelle Entwicklung des Wechselverhaltens der Haushalte bei den Stromanbietern lässt sich von einem Jahr zum nächsten modellhaft durch die Gleichung $M \cdot \vec{v}_n = \vec{v}_{n+1}$ mit

$$M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 & 0 & 0,05 \\ 0,15 & 0,8 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0,15 & 0,7 & 0,15 \\ 0,05 & 0 & 0,25 & 0,8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_n = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}$$

beschreiben. Hierbei wird die Anzahl der Haushalte, die einen Vertrag mit dem entsprechenden Stromanbieter haben, ebenfalls mit A, B, C und D bezeichnet.

- 1.1 Interpretieren Sie den Eintrag 0,25 im Sachzusammenhang.
Für zwei mögliche Paare von Stromanbietern wechseln untereinander keinerlei Haushalte. Nennen Sie diese Paare.
Geben Sie den Stromanbieter an, dessen vertraglich gebundene Haushalte am wenigsten zufrieden sind.
(4 Punkte)
- 1.2 Im Jahr 2021 waren 3000 Haushalte an Stromanbieter A, 5000 Haushalte an B und 7000 Haushalte an C vertraglich gebunden.
Bestimmen Sie für jeden Stromanbieter die zu erwartende Anzahl von Haushalten, die im Jahr 2022 an den Anbieter gebunden sein werden.
(3 Punkte)
- 1.3 Eine Verteilung $\vec{v}$ bleibt von einem auf das nächste Jahr unverändert und Stromanbieter C bindet doppelt so viele Haushalte vertraglich an sich wie Anbieter A. Berechnen Sie hierfür die Verteilung aller Haushalte.
(4 Punkte)
- 1.4 Anbieter B und C haben jeweils gleich viele Haushalte vertraglich an sich gebunden. Anbieter A möchte die Entwicklung beeinflussen, um langfristig ebenso viele Haushalte wie Anbieter B, bzw. Anbieter C an sich zu binden. Eine Werbeaktion von Anbieter A zielt daher darauf ab, den Anteil der alljährlichen Wechsel der Haushalte von B und D zu A um den selben Prozentsatz zu erhöhen. Im selben Maße soll sich dann der Anteil der alljährlichen Wechsel von B und D zu C verringern.
Ansonsten soll das Wechselverhalten aber unverändert bleiben.
Beurteilen Sie, ob dies möglich ist und ermitteln Sie gegebenenfalls, wie viel Prozent der Haushalte dabei von Anbieter B zu C wechseln würden.
(4 Punkte)

Lösungen**1.1 Interpretation des Wertes 0,25:**

25% der Haushalte, die bei Anbieter C einen Vertrag haben, wechseln innerhalb eines Jahres zu Anbieter D.

Für die Paare (A,C) und (B,D) wechseln untereinander keinerlei Haushalte, da die entsprechenden Einträge in der Matrix 0 sind.

Mit dem Anbieter C sind die Haushalte am wenigsten zufrieden, da nur 70% der Haushalte bei Anbieter C von einem Jahr zum nächsten bleiben. Bei den anderen Anbietern bleiben 80% der Haushalte von einem Jahr zum nächsten.

1.2 Anzahl der Haushalte bei Anbieter D: $25200 - 3000 - 5000 - 7000 = 10200$

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 & 0 & 0,05 \\ 0,15 & 0,8 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0,15 & 0,7 & 0,15 \\ 0,05 & 0 & 0,25 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3000 \\ 5000 \\ 7000 \\ 10200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3160 \\ 4800 \\ 7180 \\ 10060 \end{pmatrix}$$

Anzahlen im Jahr 2022:

A = 3160, B = 4800, C = 7180, D = 10060

1.3 Da die gesuchte Verteilung gleich bleiben soll, muss gelten: $M \cdot \vec{v} = \vec{v}$.

$$\text{Es gilt } \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a \\ 25200 - 3a - b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 & 0 & 0,05 \\ 0,15 & 0,8 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0,15 & 0,7 & 0,15 \\ 0,05 & 0 & 0,25 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a \\ 25200 - 3a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a \\ 25200 - 3a - b \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$0,8a + 0,05b + 0,05(25200 - 3a - b) = a$$

$$0,15a + 0,8b + 0,05 \cdot 2a = b$$

$$0,15b + 0,7 \cdot 2a + 0,15(25200 - 3a - b) = 2a$$

$$0,05a + 0,25 \cdot 2a + 0,8(25200 - 3a - b) = 25200 - 3a - b$$

Aus der 2. Zeile folgt:

$$0,25a - 0,2b = 0 \Leftrightarrow b = 1,25a$$

Einsetzen in 1. Zeile:

$$0,8a + 0,05 \cdot 1,25a + 0,05(25200 - 3a - 1,25a) = a$$

$$\Leftrightarrow 0,65a + 1260 = a$$

$$\Leftrightarrow a = 3600$$

$$\text{Daraus folgt } b = 1,25 \cdot 3600 = 4500$$

Probe mit der 3. Zeile und 4. Zeile führt auf wahre Aussagen.

$$\text{Die gesuchte Verteilung ist } \vec{v} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3600 \\ 4500 \\ 7200 \\ 9900 \end{pmatrix}.$$

$$1.4 \quad \text{Die gesuchte Verteilung hat folgende Bauart: } \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ 25200 - 3a \end{pmatrix}.$$

Nun soll gelten:

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,05+p & 0 & 0,05+p \\ 0,15 & 0,8 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0,15-p & 0,7 & 0,15-p \\ 0,05 & 0 & 0,25 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ 25200-3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ 25200-3a \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$0,8a + (0,05 + p) \cdot a + (0,05 + p)(25200 - 3a) = a$$

$$0,15a + 0,8a + 0,05 \cdot a = a$$

$$(0,15 - p) \cdot a + 0,7a + (0,15 - p)(25200 - 3a) = a$$

$$0,05a + 0,25a + 0,8(25200 - 3a) = 25200 - 3a$$

Aus der 4. Zeile folgt:

$$0,3a + 20160 - 2,4a = 25200 - 3a$$

$$\Leftrightarrow a = 5600$$

Aus der 1. Zeile folgt:

$$0,8 \cdot 5600 + (0,05 + p) \cdot 5600 + (0,05 + p) \cdot 8400 = 5600$$

$$\Leftrightarrow 5180 + 14000p = 5600$$

$$\Leftrightarrow p = 0,03$$

Die 2. Zeile und die 3. Zeile liefern wahre Aussagen.

Es ist möglich, den gleichen Anteil der alljährlich wechselnden Haushalte von D zu A um den selben Prozentsatz zu erhöhen und im selben Maß den Anteil dieser Anbieter bei deren Wechsel zu C zu senken, und das Wechselverhalten ansonsten unverändert zu lassen.

Langfristig haben dabei die Haushalte A, B und C gleich viele Haushalte an sich gebunden.

Nur noch 12 Prozent der Haushalte würden dann von B zu C wechseln.