

Hauptprüfung Abiturprüfung 2022

Baden-Württemberg

Teil 3: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Stochastik

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2022

Stochastik

- 2.1 In einer Urne befinden sich 100 Kugeln.
20 Kugeln sind rot, 30 gelb und 50 blau.

Aus dieser wird immer ohne Zurücklegen gezogen.

- 2.1.1 Zunächst werden nacheinander drei Kugeln gezogen.

- 2.1.1.1 Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Die ersten beiden Kugeln sind blau und die dritte Kugel ist rot.

B: Mindestens zwei Kugeln sind rot.

C: Die dritte Kugel ist gelb.

(5 Punkte)

- 2.1.1.2 Für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses D gilt:

$$P(D) = 3! \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{30}{99} \cdot \frac{50}{98}.$$

Formulieren Sie ein zugehöriges Ereignis D im Sachzusammenhang.

(2 Punkte)

- 2.1.2 Es werden nun sechs Kugeln gezogen. Jemand behauptet:

„Die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau vier rote Kugeln gezogen werden, kann durch $\binom{6}{4} \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^2$ berechnet werden.“

Begründen Sie, warum diese Behauptung falsch ist, und geben Sie einen richtigen Lösungsansatz an.

(3 Punkte)

- 2.2 In einer anderen Urne befinden sich ebenfalls nur rote, gelbe und blaue Kugeln. Von jeder Farbe sind jedoch jeweils gleich viele Kugeln in dieser Urne.

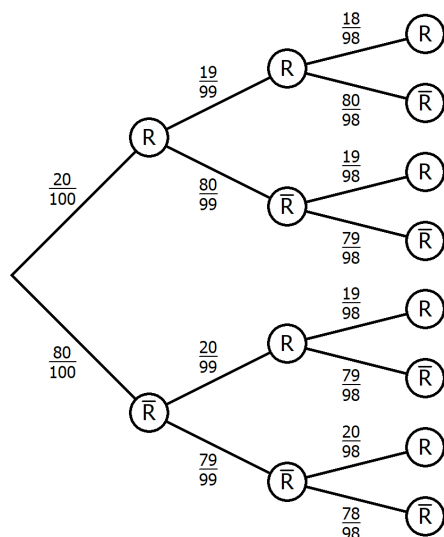
Die Wahrscheinlichkeit, dass bei dreimaligem Ziehen ohne Zurücklegen nur Kugeln gleicher Farbe gezogen werden ist mindestens 10%.

Ermitteln Sie die Anzahl der Kugeln, die in dieser Urne mindestens enthalten sein müssen.

(5 Punkte)

Lösungen

2.1.1.1 $P(A) = \frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99} \cdot \frac{20}{98} = \frac{5}{99}$ (Pfadregel im Baumdiagramm)



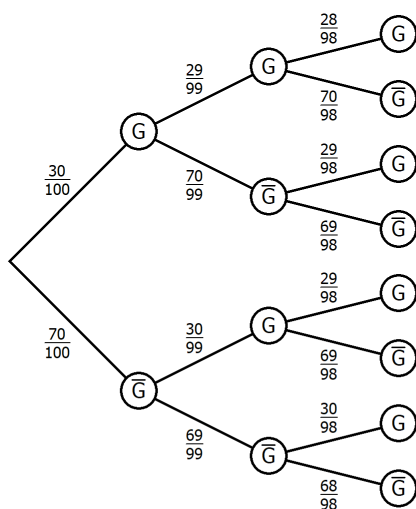
$$P(B) = P(\text{drei Kugeln sind rot}) + P(\text{2 Kugeln sind rot})$$

$$= \frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99} \cdot \frac{18}{98} + 3 \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99} \cdot \frac{80}{98} = \frac{817}{8085}$$

Der Faktor 3 ist notwendig, weil es drei Möglichkeiten gibt, an welcher Stelle die Nicht-Rote Kugel vorkommt.

Ausführliche Rechnung:

$P(C)$ kann mit einem Baumdiagramm berechnet werden



$$P(C) = P(GGG, G\bar{G}\bar{G}, \bar{G}G\bar{G}, \bar{G}\bar{G}G)$$

$$= \frac{30}{100} \cdot \frac{29}{99} \cdot \frac{28}{98} + \frac{30}{100} \cdot \frac{70}{99} \cdot \frac{29}{98} + \frac{70}{100} \cdot \frac{30}{99} \cdot \frac{29}{98} + \frac{70}{100} \cdot \frac{69}{99} \cdot \frac{30}{98} = \frac{3}{10}$$

Schnelle Rechnung:

Die Wahrscheinlichkeit, dass die dritte gezogene Kugel gelb ist, ist genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Kugel gelb ist.

$$P(C) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

$$2.1.1.2 \quad P(D) = 3! \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{30}{99} \cdot \frac{50}{98}$$

Der Term $\frac{20}{100} \cdot \frac{30}{99} \cdot \frac{50}{98}$ stellt die Wahrscheinlichkeit dar, dass die erste Kugel rot, die zweite Kugel gelb und die dritte Kugel blau ist.

Durch den Faktor $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ wird dargestellt, dass die Kugeln auch in einer beliebigen anderen Reihenfolge gezogen werden können, nämlich in den 6 Varianten GRB, GBR, BRG, BGR, RGB, RBG.

Mögliches Ereignis D: „Die drei Kugeln haben unterschiedliche Farben“.

2.1.2 Die Formel $\binom{6}{4} \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^2$ entspricht der Bernoulli-Formel und unterstellt eine Binomialverteilung.

Da die Kugeln nicht zurückgelegt werden, bleibt die Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0,2$ nicht konstant. Es handelt sich also nicht um eine Bernoullikette und es kann keine Binomialverteilung zugrunde gelegt werden.

Richtiger Lösungsansatz:

$$P(\text{genau 4 rote Kugeln}) = \frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99} \cdot \frac{18}{98} \cdot \frac{17}{97} \cdot \frac{80}{96} \cdot \frac{79}{95} \cdot \binom{6}{4}$$

Begründung: Der Term $\frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99} \cdot \frac{18}{98} \cdot \frac{17}{97} \cdot \frac{80}{96} \cdot \frac{79}{95}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die ersten 4 Kugeln rot sind und die letzten beiden Kugeln nicht rot.

Da die Reihenfolge keine Rolle spielt, gibt der Term $\binom{6}{4}$ die Anzahl der Möglichkeiten an, wie die 4 roten Kugeln auf die 6 Plätze verteilt werden können.

- 2.2 In der Urne seien x blaue Kugeln und x rote Kugeln und x gelbe Kugeln. Insgesamt sind in der Urne $3x$ Kugeln.

Wahrscheinlichkeit für 3 gleichfarbige Kugeln: $\frac{x}{3x} \cdot \frac{x-1}{3x-1} \cdot \frac{x-2}{3x-2} \cdot 3$

Der Faktor 3 ergibt sich, da BBB oder RRR oder GGG möglich ist.

Bedingung: $\frac{x}{3x} \cdot \frac{x-1}{3x-1} \cdot \frac{x-2}{3x-2} \cdot 3 \geq 0,1$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{3x-1} \cdot \frac{x-2}{3x-2} \geq 0,1 \quad | \cdot (3x-1) \cdot (3x-2)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2) \geq 0,1 \cdot (3x-1)(3x-2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0,9x^2 - 0,9x + 0,2$$

$$\Leftrightarrow 0,1x^2 - 2,1x + 1,8 \geq 0 \quad | \cdot 10$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 21x + 18 \geq 0$$

Um diese quadratische Ungleichung zu lösen gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Möglichkeit: Nutzung des Taschenrechners

Eingabe der Funktion $y = x^2 - 21x + 18$ in den Taschenrechner und Anzeige der Wertetabelle mit Startwert $x = 0$.

Dann erkennt man, dass ab $x = 21$ die y -Werte positiv werden.

Es müssen also mindestens 21 gelbe, 21 blaue und 21 rote Kugeln in der Urne enthalten sein, also insgesamt 63 Kugeln.

2. Möglichkeit: Lösung der Ungleichung „per Hand“

Die quadratische Ungleichung wird über die Gleichung $x^2 - 21x + 18 = 0$ gelöst.

$$\text{abc-Formel: } x_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 4 \cdot 1 \cdot 18}}{2} \approx \frac{21 \pm 19,2}{2} \quad x_1 \approx 20,1 \quad x_2 \approx 0,9$$

Die nach oben geöffnete Parabel $f(x) = x^2 - 21x + 18$ besitzt die Nullstellen $x = 20,1$ und $x = 0,9$.

Die Ungleichung $x^2 - 21x + 18 \geq 0$ beschreibt den Teil der Parabel, der oberhalb der x -Achse liegt.

Dies ist der Fall für $x \geq 20,1$ und $x \leq 0,9$.

Da x die Anzahl der Kugeln beschreibt kommt nur $x \geq 20,1$ in Betracht.

Es müssen also mindestens 21 gelbe, 21 blaue und 21 rote Kugeln in der Urne enthalten sein, also insgesamt 63 Kugeln.