

Hauptprüfung Abiturprüfung 2022

Baden-Württemberg

Teil 3 (mit Hilfsmittel)

Stochastik

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2022

Stochastik

- 1 Ein Institut untersucht im Auftrag eines Streamingdienstes das Medienverhalten von Bürgern einer Großstadt.

1.1

Eine statistische Erhebung unter 1000 zufällig ausgewählten Teilnehmern hat das Folgende ergeben:

450 Teilnehmer sind jugendlich und nutzen einen Streamingdienst.

Die Ergebnisse der Erhebung sind in der nicht vollständig ausgefüllten Tabelle dargestellt.

	S	$\bar{S}$	
J	450		
$\bar{J}$		150	
	800		1000

Dabei bezeichnen J und S die folgenden Ereignisse:

J: Teilnehmer ist jugendlich

S: Teilnehmer nutzt einen Streamingdienst

- 1.1.1 Geben Sie an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Teilnehmer der Erhebung jugendlich ist und einen Streamingdienst nutzt. Beurteilen Sie, ob die Ereignisse J und S stochastisch unabhängig sind. (3 Punkte)
- 1.1.2 Erläutern Sie die Bedeutung des Wertes $P_J(S)$ im Sachzusammenhang. (2 Punkte)
- 1.2 Dem Institut ist bekannt, dass 70% der Nutzer von Streamingdiensten den Anbieter A, 40% den Anbieter B und 35% beide Anbieter A und B verwenden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nutzer von Streamingdiensten keinen dieser beiden Anbieter verwendet. (3 Punkte)
- 1.3 An einer vom Institut organisierten Umfrage nimmt erfahrungsgemäß nur jede fünfte angesprochene Person teil.
- 1.3.1 Es werden 5000 zufällig ausgewählte Personen angesprochen. Die binomialverteilte Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Personen, die an der Umfrage teilnehmen. Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X. Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl k, für die gilt:
- $$P(\mu - k \leq X \leq \mu + k) \geq 0,9.$$
- (4 Punkte)
- 1.3.2 Ermitteln Sie die Anzahl der Personen, die mindestens angesprochen werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens 1000 Personen für Umfrage zu gewinnen. (3 Punkte)

Lösungen

1.1.1 Zunächst wird die Vierfeldertafel vollständig befüllt:

	S	$\bar{S}$	
J	450	50	500
$\bar{J}$	350	150	500
	800	200	1000

$P(\text{Teilnehmer ist jugendlich und nutzt Streamingdienst})$

$$= P(J \cap S) = \frac{450}{1000} = 0,45$$

Prüfung ob die Ereignisse J und S stochastisch unabhängig sind:

Bedingung für stochastische Unabhängigkeit: $P(J \cap S) = P(J) \cdot P(S)$

Es gilt $P(J \cap S) = 0,45$ sowie $P(J) = \frac{500}{1000} = 0,5$ und $P(S) = \frac{800}{1000} = 0,8$.

Da $0,45 \neq 0,5 \cdot 0,8$ ist, sind die Ereignisse J und S nicht stochastisch unabhängig.

1.1.2 $P_J(S)$ gibt die (bedingte) Wahrscheinlichkeit an, dass ein jugendlicher Teilnehmer einen Streamingdienst nutzt.

1.2 Die vorgegebenen Werte können in eine Vierfeldertafel eingetragen werden (in fett) und entsprechend ergänzt werden:

	A	$\bar{A}$	
B	35%	5%	40%
$\bar{B}$	35%	25%	60%
	70%	30%	100%

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 25\% = 0,25$.

1.3.1 X = Anzahl der Personen, die an der Umfrage teilnehmen.

X ist binomialverteilt mit $n = 5000$ und $p = 0,2$.

$$\mu = E(X) = n \cdot p = 5000 \cdot 0,2 = 1000$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{5000 \cdot 0,2 \cdot 0,8} = \sqrt{800} \approx 28,3$$

Bedingung: $P(\mu - k \leq X \leq \mu + k) \geq 0,9$

Um nicht zu lange Zeit damit zu verbringen, mit dem WTR den Wert von k durch Ausprobieren zu finden, hilft die σ -Regel:

Es gilt $P(\mu - 1,64\sigma \leq X \leq \mu + 1,64\sigma) \approx 0,9$.

Wegen $1,64 \cdot \sigma \approx 46,4$ wird k einen Wert in der Nähe von der Zahl 46 annehmen.

Probe mit $k = 46$:

$$P(1000 - 46 \leq X \leq 1000 + 46) = P(X \leq 1046) - P(X \leq 953) \approx 0,8998...$$

Probe mit $k = 47$:

$$P(1000 - 47 \leq X \leq 1000 + 47) = P(X \leq 1047) - P(X \leq 952) \approx 0,9069...$$

Die kleinste natürliche Zahl k ist 47.

1.3.2 X ist binomialverteilt mit unbekanntem n und $p = 0,2$.

Gesucht ist die kleinste Anzahl n , sodass gilt: $P(X \geq 1000) \geq 0,95$

$$\Leftrightarrow 1 - P(X \leq 999) \geq 0,95$$

$$\Leftrightarrow -P(X \leq 999) \geq -0,05$$

$$\Leftrightarrow P(X \leq 999) \leq 0,05$$

Probe mit WTR:

$$n = 5000: P(X \leq 999) \approx 0,494$$

$$n = 5200: P(X \leq 999) \approx 0,0796$$

$$n = 5250: P(X \leq 999) \approx 0,04$$

$$n = 5235: P(X \leq 999) \approx 0,0498$$

$$n = 5234: P(X \leq 999) \approx 0,0505$$

Es müssen mindestens 5235 Personen angesprochen werden.