

Hauptprüfung Abiturprüfung 2022

Baden-Württemberg

Teil 2: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Anwendungsorientierte Analysis

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2022

Anwendungsorientierte Analysis

- 4 Die Mantelfläche einer ein Meter hohen Vase wird durch Rotation des Schaubilds der Funktion f mit
- $$f(x) = 0,014 \cdot x^3 - 0,2 \cdot x^2 + 0,625 \cdot x + 1,7 ; 0 \leq x \leq 10,$$
- um die x -Achse modelliert. Dabei entspricht eine Längeneinheit einem Dezimeter (dm) in der Realität. Die Dicke des Vasenbodens und die Wandstärke der Vase werden vernachlässigt.



Abb.1: Modellierung der Vasekontur mit f .
Das Schaubild von f ist als durchgezogene Kurve dargestellt.



Abb. 2: Vase

- 4.1 Bestimmen Sie den Wert des Flächeninhalts des Bodens der Vase. Berechnen Sie die Differenz aus dem Durchmesser der Vaseöffnung und dem Durchmesser des Vasenbodens. (2 Punkte)
- 4.2 Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:
„Der größte Durchmesser der Vase ist größer als 4,4 dm.“ (3 Punkte)
- 4.3 Es gilt $\pi \cdot \int_0^5 (f(x))^2 dx \approx 65,57$.
Das Design der Vase soll nun geändert werden. Bis zu einer Höhe von 5 dm soll dabei das Modell f beibehalten werden. Ab dieser Höhe wird eine Gerade verwendet, die sich knickfrei an das Schaubild von f anschließt. Bestimmen Sie die Höhe der derart veränderten Vase, falls deren Fassungsvermögen insgesamt 70 Liter betragen soll.

(5 Punkte)

Lösungen

- 4.1 Der Radius am Boden der Vase beträgt $f(0) = 1,7$ dm

Der Boden ist eine Kreisfläche mit dem Inhalt $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1,7^2 \approx 9,08 \text{ dm}^2$

Durchmesser Vasenboden: $2 \cdot f(0) = 2 \cdot 1,7 = 3,4$ dm

Durchmesser Vassenöffnung: $2 \cdot f(10) = 2 \cdot 1,95 = 3,9$ dm

Die Durchmesser unterscheiden sich um 0,5 dm.

- 4.2 Zur Berechnung des größten Durchmessers benötigt man den y-Wert des Hochpunktes des Schaubildes von f .

Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$

Es gilt $f'(x) = 0,042x^2 - 0,4x + 0,625$

$$0,042x^2 - 0,4x + 0,625 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{0,4 \pm \sqrt{0,16 - 4 \cdot 0,042 \cdot 0,625}}{0,084} \approx \frac{0,4 \pm 0,235}{0,084} \quad x_1 = 7,56 \text{ und } x_2 = 1,96$$

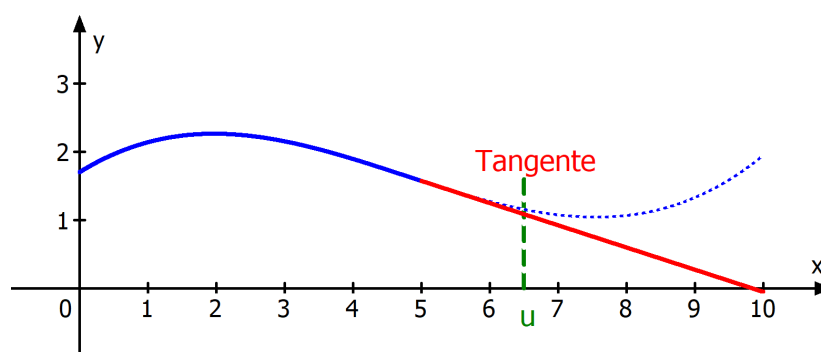
Unter Einbeziehung des Schaubildes in Abb. 1 erkennt man, dass sich der Hochpunkt bei $x = 1,96$ befindet.

y-Wert des Hochpunktes: $f(1,96) \approx 2,26$

Der größte Durchmesser beträgt $2 \cdot 2,26 = 4,52$ dm.

Damit ist der größte Durchmesser größer als 4,4 dm.

- 4.3 Eine Gerade, die sich „knickfrei“ an das Schaubild von f an der Stelle $x = 5$ anschließt entspricht einer Tangente an der Stelle $x = 5$. Knickfrei bedeutet, dass das Schaubild von f und die Gerade an der Stelle $x = 5$ einen gemeinsamen Übergangspunkt mit einer gemeinsamen Steigung besitzen.



Ansatz für die Tangentengleichung: $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

Die Berührstelle ist $u = 5$ und damit gilt $y = f'(5) \cdot (x - 5) + f(5)$

Es gilt $f(5) = 1,575$ und $f'(5) = -0,325$

Gleichung der Tangente: $y = -0,325 \cdot (x - 5) + 1,575$

$$\Leftrightarrow y = -0,325x + 3,2$$

Der Körper, der durch die Rotation der Tangente im Intervall $[5;u]$ um die x-Achse entsteht ist ein Kegelstumpf.

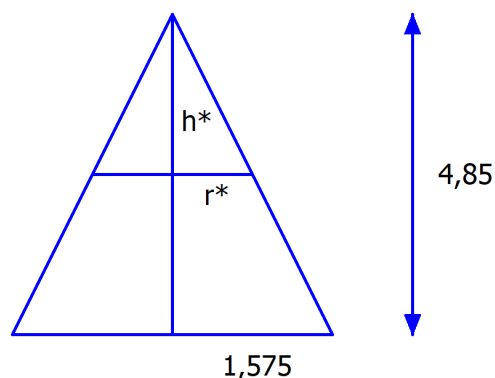
Dieser Kegelstumpf muss das Volumen $V = 70 - 65,57 = 4,43 \text{ dm}^3$ besitzen.
(70 Liter = 70 dm³)

Man betrachtet zunächst den Kegel, der durch Rotation der Tangente um die x-Achse von $x = 5$ bis zur Schnittstelle mit der x-Achse entsteht.

Schnittstelle der Tangente mit der x-Achse: $0 = -0,325x + 3,2 \Leftrightarrow x \approx 9,85 \text{ dm}$

Der Radius des Kegels ist $f(5) = r = 1,575 \text{ dm}$.

Die Höhe des Kegels beträgt $h = 9,85 \text{ dm} - 5 \text{ dm} = 4,85 \text{ dm}$



Volumen des gesamten Kegels: $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 1,575^2 \cdot 4,85 = 12,6 \text{ dm}^3$

Da der untere Kegelstumpf ein Volumen von $4,43 \text{ dm}^3$ haben muss, hat der obere Kegel ein Volumen von $V^* = 12,6 - 4,43 = 8,17 \text{ dm}^3$

Gesucht ist die nun die Höhe h^* des oberen Kegels.

Hier benötigt man 2 Formeln:

$$(1) \quad V^* = \frac{1}{3} \pi \cdot r^{*2} \cdot h^* \Leftrightarrow 8,17 = \frac{1}{3} \pi \cdot (r^*)^2 \cdot h^*$$

$$(2) \quad \text{Anwendung des 2.Strahlensatzes: } \frac{1,575}{4,85} = \frac{r^*}{h^*}$$

Aus (2) folgt $h^* = 3,08r^*$

Einsetzen in (1):

$$8,17 = \frac{1}{3} \pi \cdot (r^*)^2 \cdot 3,08 \cdot r^*$$

$$\Leftrightarrow (r^*)^3 = 2,533$$

$$\Leftrightarrow r^* \approx 1,36 \text{ dm}$$

Daraus folgt $h^* = 3,08 \cdot 1,36 = 4,19 \text{ dm}$

Damit beträgt die Höhe des Kegelstumpfes $4,85 - 4,190 = 0,66 \text{ dm}$.

Damit ist in der obigen Skizze $u = 0,66$ und die Gesamthöhe der Vase beträgt $5 \text{ dm} + 0,66 \text{ dm} = 5,66 \text{ dm}$.