

Hauptprüfung Abiturprüfung 2022

Baden-Württemberg

Teil 2: Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

Analysis

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2022

Analysis

1 Gegeben sind die Punkte $T_1(-2 | 2)$, $T_2(2 | 2)$ und $H(0 | 4)$.

1.1 Bestimmen Sie einen Funktionsterm der Polynomfunktion vom Grad 4, deren Schaubild K die folgenden drei Eigenschaften hat:

- K ist symmetrisch zur y -Achse
- K schneidet die y -Achse im Punkt H
- K hat einen Extrempunkt in T_1

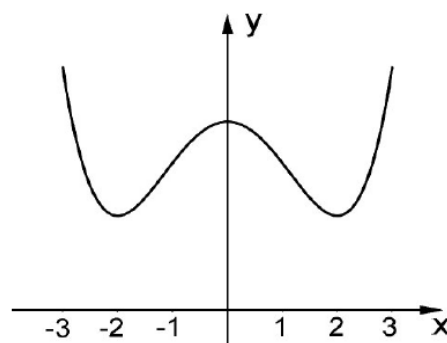
(4 Punkte)

1.2

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 4; \quad -3 \leq x \leq 3.$$

Das Schaubild von f ist K_f (siehe Abbildung).



1.2.1 Die Funktionsgleichung von f lässt sich in der Form

$$f(x) = a(x+b)^2(x+c)^2 + 2$$

darstellen. Geben Sie passende Werte für a , b und c an.

(2 Punkte)

1.2.2 Eine nach unten geöffnete Parabel, die H als Scheitelpunkt hat, schneidet K_f in einem Punkt $S(x_0 | f(x_0))$ mit $x_0 > 0$. Begründen Sie, dass $x_0 < 2\sqrt{2}$ gilt.

(3 Punkte)

1.2.3 Ermitteln Sie den größten Wert der ersten Ableitung von f für $-3 \leq x \leq 3$.

(4 Punkte)

1.3 Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = \cos(u \cdot x) + v$; $-3 \leq x \leq 3$, hat nur die drei Extrempunkte T_1 , H und T_2 .

1.3.1 Bestimmen Sie die Werte von u und v .

(2 Punkte)

1.3.2 Skizzieren Sie das Schaubild der Stammfunktion G von g mit $G(-3) = 0$. Begründen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen wahr sind:

- (1) Jede Stammfunktion von g besitzt eine Umkehrfunktion.
- (2) Der Definitionsbereich einer solchen Umkehrfunktion ist ein Intervall der

$$\text{Länge } \int_{-3}^3 g(x) dx.$$

(5 Punkte)

Lösungen

1.1 Ansatz für die Funktion: $p(x) = ax^4 + bx^2 + c$

Außerdem gilt $p'(x) = 4ax^3 + 2bx$

Da das Schaubild K symmetrisch zur y-Achse ist, besitzt die Funktionsgleichung nur gerade Exponenten.

$H(0|4)$ ist ein Punkt von K: $p(0) = 4$: $c = 4$

$T_1(-2|2)$ ist ein Punkt von K: $p(-2) = 2$: $16a + 4b + 4 = 2$

T_1 ist ein Extrempunkt von K: $p'(-2) = 0$: $-32a - 4b = 0$

Zu lösen ist folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} 16a & +4b & = -2 \\ -32a & -4b & = 0 \end{array}$$

Addition der Gleichungen: $-16a = -2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{8}$

Einsetzen von $a = \frac{1}{8}$ in die erste Gleichung: $16 \cdot \frac{1}{8} + 4b = -2 \Leftrightarrow b = -1$

Die Gleichung der Funktion lautet $p(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 4$

1.2.1 Die angegebene Funktion entspricht der Funktion aus 1.1

Das heißt, dass $T_1(-2|2)$ und $T_2(2|2)$ die Tiefpunkte der Funktion sind.

Wird das gesamte Schaubild um 2 Einheiten nach unten verschoben liegen die Tiefpunkte auf der x-Achse und die korrigierte Funktionsgleichung lautet $g(x) = f(x) - 2 = a(x+b)^2(x+c)^2$.

Da bei $x = -2$ und $x = 2$ nun doppelte Nullstellen vorliegen, gilt $b = -2$ und $c = 2$ (oder umgekehrt).

Zwischenergebnis für die Funktionsgleichung: $f(x) = a \cdot (x-2)^2 \cdot (x+2)^2 + 2$

Berechnung von a mithilfe des Punktes $H(0|4)$:

$$f(0) = 4: 4 = a \cdot 4 \cdot 4 + 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{8}$$

1.2.2 Ansatz für die Parabelgleichung: $g(x) = ax^2 + c$

Da der Scheitelpunkt $H(0|4)$ auf der y-Achse liegt, ist das Schaubild symmetrisch zur y-Achse. Daher besitzt die Funktionsgleichung nur gerade Exponenten.

Es gilt $g(0) = 4$: $c = 4$

Gleichung der Parabel: $g(x) = ax^2 + 4$

Da die Parabel nach unten geöffnet ist, muss $a < 0$ sein.

Berechnung des Schnittpunktes der Parabel und des Schaubildes von f:

$$ax^2 + 4 = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8}x^4 - x^2 - ax^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot \left(\frac{1}{8}x^2 - 1 - a \right) = 0$$

Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt:

I) $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ fällt als Lösung aus, da $x_0 > 0$ gilt

$$\text{II) } \frac{1}{8}x^2 = a + 1 \Leftrightarrow x^2 = 8a + 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8a + 8}$$

Da $x_0 > 0$ ist, kommt nur $x = \sqrt{8a + 8}$ in Frage.

Wegen $a < 0$ gilt $x = \sqrt{8a + 8} < \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$ was zu zeigen war.

$$1.2.3 \quad f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 4$$

$$\text{Es gilt } f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x.$$

Gesucht ist der größte Wert (also das absolute Maximum) von

$$h(x) = f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x.$$

Berechnung des lokalen Maximums von h (Hochpunkt): $h'(x) = 0$ und $h''(x) < 0$

$$h'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2$$

$$h''(x) = 3x$$

$$\frac{3}{2}x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$h''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) > 0 \text{ also lokales Minimum}$$

$$h''\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) < 0 \text{ also lokales Maximum}$$

$$\text{y-Wert des Hochpunktes: } h\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) \approx 1,53$$

Untersuchung der Randwerte $x = -3$ und $x = 3$:

Es gilt $h(-3) = -7,5$ und $h(3) = 7,5$.

Da $7,5 > 1,53$ ist, existiert das globale Maximum bei $x = 3$.

Der maximale Wert der Ableitung im Intervall $[-3;3]$ beträgt 7,5.

1.3.1 $g(x) = \cos(u \cdot x) + v$

Anhand der y-Koordinaten der Tiefpunkte und Hochpunkte der Funktion kann

der Wert von v berechnet werden: $v = \frac{y_{HP} + y_{TP}}{2} = \frac{4 + 2}{2} = 3$

Der Abstand der x-Koordinaten der Tiefpunkte ist die Periode der Funktion:
 $p = 4$.

$$\text{Es gilt } p = \frac{2\pi}{u} \Leftrightarrow u = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

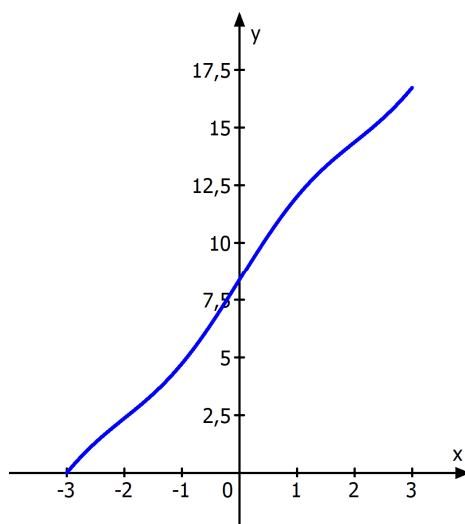
1.3.2 Eine allgemeine Stammfunktion von $g(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x) + 3$ ist

$$G(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x) \cdot \frac{2}{\pi} + 3x + C.$$

Wegen $G(-3) = 0$ folgt $0 = \sin(-\frac{3}{2}\pi) \cdot \frac{2}{\pi} - 9 + C \Leftrightarrow C \approx 8,36$.

Die Stammfunktion lautet $G(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x) \cdot \frac{2}{\pi} + 3x + 8,36$.

Skizze von G (mit Hilfe der Wertetabelle des WTR):



(1) Eine Funktion besitzt eine Umkehrfunktion, wenn sie streng monoton ist.

Für jede Stammfunktion G von g gilt $G'(x) = g(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x) + 3 > 0$ für alle x -Werte im Intervall $-3 \leq x \leq 3$ (da der Kosinusterm nur Werte zwischen -1 und 1 annehmen kann).

Wegen $G'(x) > 0$ ist die Funktion G streng monoton wachsend.

Damit besitzt jede Stammfunktion G von g eine Umkehrfunktion.

- (2) Die Definitionsmenge der Umkehrfunktion von G entspricht der Wertemenge der Funktion G .

Da die Funktion G streng monoton wachsend ist, kann G gemäß der Skizze Werte im Intervall $[G(-3) ; G(3)]$ annehmen.
Die Länge dieses Intervalls beträgt $G(3) - G(-3)$.

Wegen $\int_{-3}^3 g(x) dx = [G(x)]_{-3}^3 = G(3) - G(-3)$ stimmt der Term mit der Länge des Intervalls überein.