

Hauptprüfung Abiturprüfung 2022

Baden-Württemberg

Teil 1 (ohne Hilfsmittel)

Analysis, Stochastik, Vektorgeometrie, Matrizenrechnung

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2022

Analysis

- 1.1 Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f ist gegeben durch $f(x) = 2 \cdot e^x$
Ordnen Sie die Werte

$$f(0), \quad f'(1) \quad \text{und} \quad \int_0^1 f(x) dx$$

nach deren Größe in aufsteigender Reihenfolge.

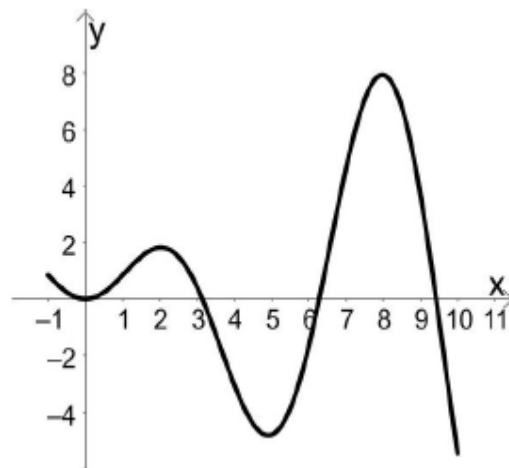
(4 Punkte)

1.2

Die Funktion g ist gegeben durch

$$g(x) = x \cdot \sin(x), \quad -1 \leq x \leq 10$$

Die Abbildung zeigt das
Schaubild K_g von g .



- 1.2.1 Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte von K_g mit der ersten Winkelhalbierenden $y = x$. Geben Sie die Anzahl der Berührungspunkte an.
(3 Punkte)

- 1.2.2 Zeigen Sie, dass die Funktion G mit $G(x) = -x \cdot \cos(x) + \sin(x)$, $-1 \leq x \leq 10$ eine Stammfunktion von g ist.
Geben Sie zudem die Stammfunktion von g an, deren Schaubild den Punkt $(0|7)$ enthält.
(3 Punkte)

- 1.3 Ermitteln Sie eine Gleichung der quadratischen Funktion h , die die beiden folgenden Eigenschaften hat:
- Der Graph von h schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x + 1$ im Punkt $(0|1)$ unter einem rechten Winkel.
 - Die x - und die y -Koordinate des Extrempunkts des Graphen von h stimmen überein.

(5 Punkte)

Stochastik

2 Eine ideale Münze zeigt nach jedem Wurf entweder Kopf oder Zahl an.

2.1 Man wirft die Münze solange bis sie Zahl zeigt, jedoch höchstens dreimal.

2.1.1 Zeichnen Sie ein Baumdiagramm, das dieses Zufallsexperiment vollständig beschreibt.

(2 Punkte)

2.1.2 Bestimmen Sie, wie oft man die Münze im Mittel wirft.

(2 Punkte)

2.2 Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie:

(1) Wird die Münze fünfmal hintereinander geworfen, so ist die
Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „genau einmal Zahl“ größer als $\frac{1}{8}$.

(2) Es gibt eine Anzahl von Würfeln für die Folgendes gilt:
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „genau dreimal Zahl“ ist gleich der
Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „genau zweimal Zahl“.

(4 Punkte)

Stochastik

- 2 Ein Stapel besteht aus sechs zufällig angeordneten Karten. Davon zeigen zwei Karten das Bild „Bube“, zwei das Bild „Dame“ und zwei das Bild „König“. Die oberste Karte des Stapels wird von einem Spieler gezogen und deren Bild wird notiert. Vor dem nächsten Zug wird die Karte wieder in den Stapel zurückgelegt und dieser neu gemischt.
Der Spieler zieht dreimal nacheinander die oberste Karte des Stapels.

- 2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

E_1 : Der Spieler hat drei verschiedene Bilder gezogen.

E_2 : Der Spieler hat genau einmal einen Buben gezogen.

E_3 : Der Spieler hat mindestens einmal einen Buben oder mindestens zweimal einen König gezogen.

(5 Punkte)

- 2.2 Im Folgenden beträgt der Einsatz 5 Euro.

Der Spieler erhält nur dann eine Auszahlung, falls mindestens zweimal das gleiche Bild gezogen wird. Die Auszahlung beträgt 18 Euro, falls der Spieler dreimal das gleiche Bild zieht.

Ermitteln Sie die Auszahlung, die der Spieler im verbleibenden Fall erhalten muss, damit es sich um ein faires Spiel handelt.

(3 Punkte)

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

- 3 Für ein Viereck ABCD mit den Eckpunkten A, B, C und D gilt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- 3.1 Bestimmen Sie den Vektor $\overrightarrow{DA}$.
Weisen Sie nach, dass dieses Viereck ein Rechteck ist. (3 Punkte)
- 3.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A, sodass sich die Diagonalen des Vierecks ABCD in (3,5|4|1,5) schneiden. (2 Punkte)
- 3.3 Durch Streckung des Vierecks ABCD wird dessen Flächeninhalt um den Faktor 5 vergrößert. Die Seitenverhältnisse bleiben dabei unverändert.
Berechnen Sie eine Seitenlänge des entstehenden, vergrößerten Vierecks. (2 Punkte)

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

- 3 Die Gerade g geht durch die Punkte $A(2|-2|2)$ und $B(2|4|5)$.
- 3.1 Begründen Sie, dass g parallel zur x_2x_3 -Koordinatenebene ist, aber nicht in dieser Ebene liegt. (2 Punkte)
- 3.2 Bestimmen Sie einen Punkt P auf g , sodass $2:1$ das Verhältnis der Streckenlängen $\overline{AP} : \overline{BP}$ ist. (2 Punkte)
- 3.3 $C(4|2|1,5)$ ist ein weiterer Punkt und $M(2|1|3,5)$ ein Punkt auf g . Weisen Sie nach, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{MC}$ zueinander orthogonal sind. Berechnen Sie den Abstand von C zur Geraden g . (3 Punkte)

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3 Die Matrix S ist gegeben durch

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

E bezeichnet die Einheitsmatrix vom Format 2×2 .

3.1 Im Folgenden ist $\vec{x}$ mit $\vec{x} \neq \vec{0}$ ein Vektor, sodass $S \cdot \vec{x} = \vec{x}$ gilt.

3.1.1 Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$(S^4 + S^3 + S^2 + S - E) \cdot \vec{x}$$

so weit wie möglich.

(2 Punkte)

3.1.2 Bestimmen Sie einen solchen Vektor $\vec{x}$.

(2 Punkte)

3.2 Eine quadratische Matrix heißt *stochastische Matrix*, falls alle ihre Elemente nicht negativ sind und für jede Spalte die Summe der Elemente den Wert 1 hat.

Somit ist S eine stochastische Matrix.

Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:

„Ist M eine beliebige stochastische Matrix vom Format 2×2 , so ist $S \cdot M$ eine stochastische Matrix.“

(3 Punkte)

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3 Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.1 Berechnen Sie die Inverse von A.

(2 Punkte)

3.2 Begründen Sie, dass die Gleichung $B \cdot \vec{x} = A \cdot \vec{y}$ für jede Wahl von

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

keine eindeutige Lösung $\vec{x}$ besitzt.

(2 Punkte)

3.3 Untersuchen Sie, ob die Matrixgleichung

$$A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B)$$

gilt, ohne eine der vier Matrizen

$$A^2, B^2, A + B \text{ und } A - B$$

dabei zu berechnen.

(3 Punkte)

Lösungen**Analysis**

1.1 $f(x) = 2 \cdot e^x$

$$f(0) = 2e^0 = 2$$

$$f'(x) = 2e^x \Rightarrow f'(1) = 2e \approx 2 \cdot 2,7 = 5,4$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 2e^x dx = \left[2e^x \right]_0^1 = 2e^1 - 2e^0 = 2e - 2 \approx 5,4 - 2 = 3,4$$

$$\text{Damit gilt } f(0) < \int_0^1 f(x) dx < f'(1).$$

- 1.2.1 Berechnung der gemeinsamen Punkte durch Gleichsetzen der Funktionen
- $g(x) = x \cdot \sin(x)$
- und
- $h(x) = x$
- :

$$x \cdot \sin(x) = x$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \sin(x) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (\sin(x) - 1) = 0$$

Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt:

I) $x_1 = 0$

II) $\sin(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 1$

$$x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \frac{5\pi}{2}$$

weitere Lösungen liegen außerhalb des angegebenen Intervalls

Da die Punkte auf der ersten Winkelhalbierenden $y = x$ liegen, sind die x- und y-Werte der Punkte identisch.

$$O(0|0), P\left(\frac{\pi}{2} \mid \frac{\pi}{2}\right), Q\left(\frac{5\pi}{2} \mid \frac{5\pi}{2}\right)$$

Ob sich die Schaubilder in den Punkten berühren, muss mit Hilfe der Ableitungen geprüft werden. Es muss gelten: $g'(x) = h'(x)$

$$g'(x) = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)$$

$$h'(x) = 1$$

$$\text{Prüfung für Punkt O: } g'(0) = \sin(0) + 0 \cdot \cos(0) = 0 \text{ und } h'(0) = 1$$

$$\text{Prüfung für Punkt P: } g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ und } h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\text{Prüfung für Punkt Q: } g'\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \frac{5\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1 \text{ und } h'\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1$$

Damit berühren sich die Schaubilder in 2 Punkten, P und Q.

- 1.2.2 Die Prüfung der Stammfunktionseigenschaft erfolgt über die Kontrolle, ob $G'(x) = g(x)$ gilt.

$$G(x) = -x \cdot \cos(x) + \sin(x)$$

$$\begin{aligned} G'(x) &= -1 \cdot \cos(x) - x \cdot (-\sin(x)) + \cos(x) \\ &= -\cos(x) + x \cdot \sin(x) + \cos(x) = x \cdot \sin(x) = g(x) \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass G eine Stammfunktion von g ist.

Ansatz für die gesuchte Stammfunktion: $G^*(x) = -x \cdot \cos(x) + \sin(x) + C$

$$\text{Bedingung: } G^*(0) = 7: 0 \cdot \cos(0) + \sin(0) + C = 7 \Leftrightarrow C = 7$$

Die gesuchte Stammfunktionsgleichung lautet $G^*(x) = -x \cdot \cos(x) + \sin(x) + 7$

- 1.3 Ansatz für die Funktionsgleichung: $h(x) = ax^2 + bx + c$

Es gilt $h'(x) = 2ax + b$.

A(0|1) liegt auf dem Schaubild: $h(0) = 1: c = 1$

senkrechter Schnitt:

Die gegebene Gerade hat die Steigung $\frac{1}{4}$, damit hat die Tangente an das

Schaubild von h im Punkt A die Steigung $m = -\frac{1}{\frac{1}{4}} = -4$.

$$\text{Bedingung: } h'(0) = -4: b = -4$$

Zwischenergebnis der Funktionsgleichung: $h(x) = ax^2 - 4x + 1$

Übereinstimmung der x- und y-Koordinate des Extrempunktes:

Berechnung der Extremstelle von h: $h'(x) = 0$

$$h'(x) = 2ax - 4$$

$$2ax - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{2a} = \frac{2}{a}$$

$$\text{Nun soll gelten: } h\left(\frac{2}{a}\right) = \frac{2}{a}: a \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{a} + 1 = \frac{2}{a}$$

$$a \cdot \frac{4}{a^2} - \frac{8}{a} + 1 = \frac{2}{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{a} - \frac{8}{a} + 1 = \frac{2}{a}$$

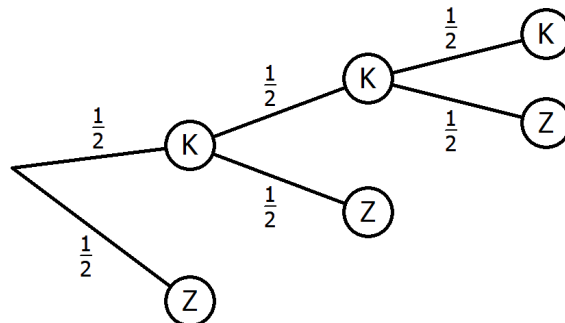
$$\Leftrightarrow 1 = \frac{6}{a}$$

$$\Leftrightarrow a = 6$$

Funktionsgleichung: $h(x) = 6x^2 - 4x + 1$

Stochastik

2.1.1 Baumdiagramm:



2.1.2 Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Versuche.
Gesucht ist der Erwartungswert von X .

Die Zufallsgröße X kann nur die Werte 1 oder 2 oder 3 annehmen.

$$P(X=1) = P(Z) = \frac{1}{2}$$

$$P(X=2) = P(KZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=3) = P(KKZ) + P(KKK) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 1,75$$

Im Durchschnitt wird die Münze 1,75mal geworfen.

2.2

(1) Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der Würfe mit Ergebnis „Zahl“.

X ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = \frac{1}{2}$.

$$P(X=1) = \binom{5}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}$$

Da $\frac{5}{32} > \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ gilt, ist die Aussage wahr.

(2) Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der Würfe mit Ergebnis „Zahl“.

X ist binomialverteilt mit unbekanntem n und $p = \frac{1}{2}$.

Bedingung: $P(X=2) = P(X=3)$

$$\binom{n}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \binom{n}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

$$\Leftrightarrow \binom{n}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{n}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \binom{n}{2} = \binom{n}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot 1} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \quad | : n(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{n-2}{6}$$

$$\Leftrightarrow 3 = n - 2$$

$$\Leftrightarrow n = 5$$

Die Aussage ist wahr. Die Bedingung gilt für 5 Würfe.

Stochastik

$$2.1 \quad P(E_1) = P(\text{BDK, BKD, DKB, DBK, KBD, KDB}) = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

E_2 : Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Buben an.

X ist binomialverteilt mit $n = 3$ und $p = \frac{1}{3}$:

$$P(X=1) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$$

E_3 :

A: mindestens ein Bube

B: mindestens zwei Könige

Additionssatz: $P(E_3) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A) = 1 - P(\text{kein Bube}) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27}$$

$$P(B) = P(\text{KKK}) + 3 \cdot P(\text{KK}\bar{\text{K}}) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{27} + \frac{6}{27} = \frac{7}{27}$$

$$P(A \cap B) = 3 \cdot P(\text{KKB}) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{9}$$

$$P(E_3) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{19}{27} + \frac{7}{27} - \frac{1}{9} = \frac{23}{27}$$

2.2 Die Zufallsgröße X gibt die Auszahlung in Euro an.

Wahrscheinlichkeit für dreimal dasselbe Bild:

$$P(\text{KKK}) + P(\text{BBB}) + P(\text{DDD}) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{9}$$

Wahrscheinlichkeit für zweimal dasselbe Bild:

$$3 \cdot (P(\text{KK}\bar{\text{K}}) + P(\text{BB}\bar{\text{B}}) + P(\text{DD}\bar{\text{D}})) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3\right) = \frac{2}{3}$$

Die gesuchte Auszahlung sei x .

$$P(X=18) = \frac{1}{9} \quad \text{und} \quad P(X=x) = \frac{2}{3}$$

Ansonsten gibt es keine Auszahlung, also $P(X=0) = 1 - \frac{1}{9} - \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

Bedingung für faires Spiel: $E(X) = 5$ Euro (Einsatz)

$$E(X) = 18 \cdot \frac{1}{9} + x \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{2}{9} = 5$$

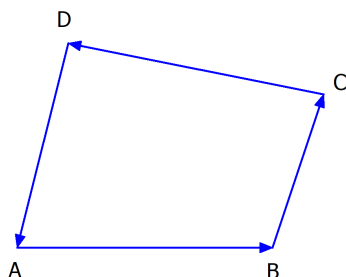
$$\Leftrightarrow 2 + \frac{2}{3}x = 5$$

$$\Leftrightarrow x = 4,5$$

Im verbleibenden Fall muss der Spieler eine Auszahlung von 4,50 Euro erhalten, damit das Spiel fair ist.

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

3.1 Skizze des Vierecks:



$$\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = -\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

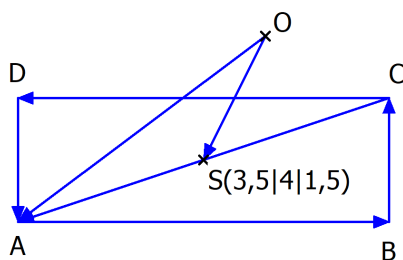
Kontrolle, ob das Viereck ein Rechteck ist:

- Es handelt sich um ein Parallelogramm, da $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ gilt, das heißt die gegenüberliegenden Vektoren sind parallel und gleich lang.
- Im Punkt B existiert ein rechter Winkel, da

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 + 0 - 2 = 0 \text{ gilt.}$$

Damit liegt ein Rechteck vor.

3.2



Die Berechnung der Punktkoordinaten von A erfolgt mit Hilfe des Ortsvektors des Punktes A.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OS} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OS} + \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 4 \\ 1,5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 3,5 \\ 4 \\ 1,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1,5 \\ -1 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Punkt A hat die Koordinaten A(2|3|2).

3.3 Berechnung der Seitenlängen des Rechtecks:

$$|\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+4+4} = 3 \text{ Längeneinheiten}$$

$$|\overline{BC}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5}$$

1.Lösungsmöglichkeit:

Flächeninhalt des Rechtecks: $A = 3 \cdot \sqrt{5}$

Flächeninhalt des Rechtecks nach der Streckung: $A_{\text{neu}} = 3 \cdot \sqrt{5} \cdot 5 = 15 \cdot \sqrt{5}$

Gesucht ist nun der Faktor k , um den die Seiten des Rechtecks gestreckt werden müssen.

Die Länge der verlängerten Seite $\overline{AB}$ beträgt $3 \cdot k$

Die Länge der verlängerten Seite $\overline{BC}$ beträgt $\sqrt{5} \cdot k$

Somit muss gelten:

$$3 \cdot k \cdot \sqrt{5} \cdot k = 15 \cdot \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 5$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{5}$$

Die negative Lösung von k kann man vernachlässigen.

Somit haben die neuen Seiten folgende Längen:

Länge der verlängerten Seite $\overline{AB}$: $3 \cdot \sqrt{5}$ Längeneinheiten

Länge der verlängerten Seite $\overline{BC}$: $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$ Längeneinheiten

2.Lösungsmöglichkeit:

Hier muss man folgende Formel kennen, die üblicherweise in der Mittelstufe behandelt wird:

Wird eine Figur mit dem Faktor k gestreckt, verändert sich der zugehörige Flächeninhalt mit dem Faktor k^2 .

$$k^2 = 5 \Rightarrow k = \sqrt{5}$$

Somit verlängert sich jede Seite mit dem Faktor $\sqrt{5}$.

Somit haben die neuen Seiten folgende Längen:

Länge der verlängerten Seite $\overline{AB}$: $3 \cdot \sqrt{5}$ Längeneinheiten

Länge der verlängerten Seite $\overline{BC}$: $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$ Längeneinheiten

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

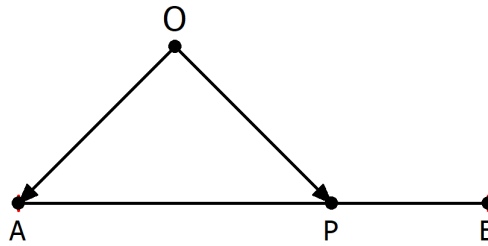
3.1 Aufstellen der Geradengleichung von g:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Da die x_1 -Koordinate des Richtungsvektors gleich Null ist, ist die Gerade parallel zur x_2x_3 -Koordinatenebene.

Da die x_1 -Koordinate des Stützvektors ungleich Null ist, liegt g nicht in der Koordinatenebene.

3.2

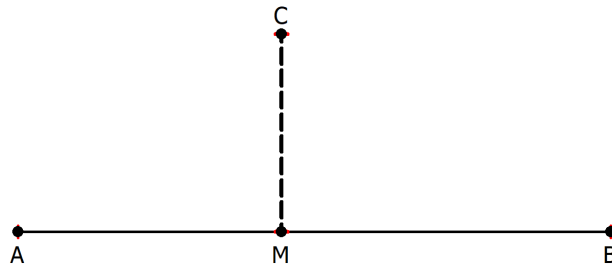


Das angegebene Verhältnis 2:1 sagt aus, dass die Strecke $\overline{AB}$ gedanklich in 3 gleiche Teilstücke aufgeteilt wird. Die Länge von 2 Teilstücken entsprechen der Strecke $\overline{AP}$.

$$\text{Somit gilt: } \overline{OP} = \overline{OA} + \frac{2}{3} \cdot \overline{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Der Punkt P besitzt die Koordinaten P(2|2|4).

3.3



Nachweis der Orthogonalität:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Es gilt } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 + 6 - 6 = 0$$

Da das Skalarprodukt Null ergibt, stehen die Vektoren senkrecht zueinander.

Der Abstand von C zu g entspricht dem Abstand der Punkte C und M aufgrund der gerade gezeigten Orthogonalität.

$$d(C, g) = |\overrightarrow{MC}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$$

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3.1.1 Es gilt $S \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Daraus folgt:

$$S^2 \cdot \vec{x} = S \cdot S \cdot \vec{x} = S \cdot \vec{x} = \vec{x}.$$

$$S^3 \cdot \vec{x} = S \cdot S^2 \cdot \vec{x} = S \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

$$S^4 \cdot \vec{x} = S \cdot S^3 \cdot \vec{x} = S \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

Vereinfachung des Terms $(S^4 + S^3 + S^2 + S - E) \cdot \vec{x}$:

$$\begin{aligned} (S^4 + S^3 + S^2 + S - E) \cdot \vec{x} &= S^4 \cdot \vec{x} + S^3 \cdot \vec{x} + S^2 \cdot \vec{x} + S \cdot \vec{x} - E \cdot \vec{x} \\ &= \vec{x} + \vec{x} + \vec{x} + \vec{x} - \vec{x} = 3 \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

3.1.2 Es soll gelten:
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 &= x_1 & -\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 &= 0 \\ \frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 &= x_2 & \frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow$$

Addition der beiden Zeilen ergibt $0 = 0$.

Das heißt, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt.

Da nur eine Lösung gesucht ist, kann für eine Variable ein beliebiger Wert vorgegeben werden (aber nicht Null, da der Fall $\vec{x} = \vec{0}$ in der Aufgabenstellung ausgeschlossen wurde).

Vorgabe: $x_2 = 2$

Aus der 1. Gleichung folgt dann:

$$-\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}x_1 = -1$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{4}{3}$$

Ein möglicher Lösungsvektor ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$

(es gibt aber auch viele andere mögliche Lösungen).

3.2 M sei eine stochastische Matrix.

Es gilt $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$, wobei $0 \leq a \leq 1$ und $0 \leq b \leq 1$ gelten muss, damit alle

Elemente der Matrix nicht negativ sind.

$$S \cdot M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}(1-a) & \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}(1-b) \\ \frac{3}{4}a + \frac{1}{2}(1-a) & \frac{3}{4}b + \frac{1}{2}(1-b) \end{pmatrix}$$

$$S \cdot M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}a + \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}b + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}b + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Kontrolle, ob $S \cdot M$ eine stochastische Matrix ist:

- 1.) Die Summe der Spalten ergibt 1, damit ist diese Bedingung erfüllt.
- 2.) Da $0 \leq a \leq 1$ und $0 \leq b \leq 1$ ist, sind alle Elemente der Matrix $S \cdot M$ nicht negativ, damit ist auch diese Bedingung erfüllt.

$S \cdot M$ ist eine stochastische Matrix.

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3 Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3 Untersuchen Sie, ob die Matrizengleichung

$$A^2 - B^2 = (A+B) \cdot (A-B)$$

gilt, ohne eine der vier Matrizen

$$A^2, B^2, A+B \text{ und } A-B$$

dabei zu berechnen.

(3 Punkte)

3.1 Inverse von A:

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \text{(II)} \quad \\ \text{(III)} \quad \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(I)}^* = -3 \cdot \text{(III)} + \text{(I)} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \text{(II)} \quad \\ \text{(III)} \quad \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)}^{**} = \text{(II)} - \text{(I)}^* \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} | : (-4) \\ | : 2 \end{array} \\ \text{(II)} \quad \\ \text{(III)} \quad \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2 $B \cdot \vec{x} = A \cdot \vec{y}$

Würde die Gleichung eine eindeutige Lösung $\vec{x}$ besitzen, könnte man die Gleichung wie folgt auflösen:

$$\vec{x} = B^{-1} \cdot A \cdot \vec{y}$$

Allerdings existiert die Inverse der Matrix B nicht.
Dies kann man daran erkennen, dass in der Matrix zwei Zeilen übereinstimmen.

$$3.3 \quad A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B)$$

Auflösen der Klammern ergibt:

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

Das Ergebnis ist nur dann $A^2 - B^2$, falls $A \cdot B = B \cdot A$ gelten würde.

Kontrolle:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & .. & .. \\ .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & .. & .. \\ .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

Alleine der Eintrag links oben zeigt, dass die Matrizen nicht gleich sind.

Damit gilt die Matrizengleichung nicht.