

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2022

Baden-Württemberg

Wahlteil: Aufgabe 4 Analysis

Hilfsmittel: Merkhilfe und WTR

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild ist K_f .

- 4.1 Berechnen Sie die Nullstellen von f und geben Sie die Art der Nullstellen an.

Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunkts von K_f .

Zeichnen Sie K_f für $-1 \leq x \leq 3,5$.

(11 Punkte)

- 4.2 Bestimmen Sie den Funktionsterm einer Stammfunktion von f , deren Schaubild durch den Punkt $A(2|0)$ verläuft. (4 Punkte)

- 4.3 Die Punkte $P(1|0)$, $Q(u|f(u))$ und $R(u|0)$ mit $1 \leq u \leq 3$ bilden ein Dreieck.

Zeichnen Sie das Dreieck für $u = 2$ in das Koordinatensystem aus Aufgabe 4.1.

Berechnen Sie für $u = 2$ und $u = 2,5$ die Flächeninhalte der zugehörigen Dreiecke.

Welches der beiden Dreiecke hat den größeren Flächeninhalt?

(7 Punkte)

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = 2 - 2\cos(0,5\pi x)$, $x \in [0,6]$.

- 4.4 Geben Sie den Wertebereich an und skizzieren Sie das Schaubild von h .

(4 Punkte)

- 4.5 Begründen Sie, warum gilt: $\int_0^4 h(x) dx > 0$.

Um wie viele Längeneinheiten muss das Schaubild von h mindestens in

y -Richtung verschoben werden, damit $\int_0^4 h(x) dx > 0$ nicht mehr gilt?

(4 Punkte)

Lösung

4.1 $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2$

Berechnung der Nullstellen: $f(x) = 0$

$$\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) = 0 \quad \text{Lösung mit Satz vom Nullprodukt}$$

I) $x^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0$ ist eine doppelte Nullstelle

II) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x_3 = 3$ ist eine einfache Nullstelle

Bedingung für Wendepunkt: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x$$

$$f''(x) = 3x - 3$$

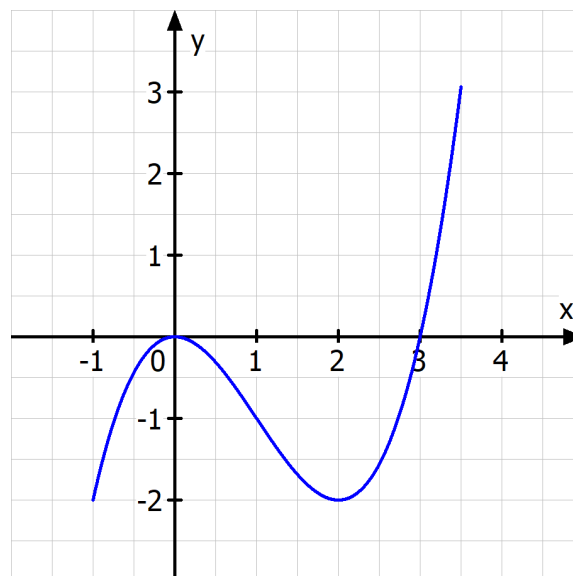
$$f'''(x) = 3$$

$$3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$f'''(1) = 3 \neq 0$, damit existiert bei $x = 1$ eine Wendestelle

Wegen $f(1) = -1$ lautet der Wendepunkt $W(1|-1)$.

Zeichnung: Nutzung der berechneten Punkte sowie die Wertetabelle des TR



4.2 Allgemeine Stammfunktion F von f: $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} x^4 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 + C = \frac{1}{8} x^4 - \frac{1}{2} x^3 + C$

Es soll gelten: $F(2) = 0$

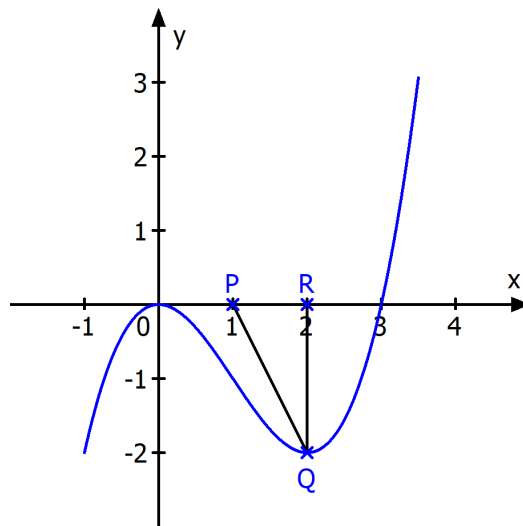
$$F(2) = \frac{1}{8} \cdot 2^4 - \frac{1}{2} \cdot 2^3 + C = -2 + C$$

$$-2 + C = 0 \Leftrightarrow C = 2$$

Gesuchte Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{8} x^4 - \frac{1}{2} x^3 + 2$

4.3 Für $u = 2$ hat das Dreieck folgende Eckpunkte:
 $P(1|0)$, $R(2|0)$ und $Q(2|f(2))$, also $Q(2|-2)$

Zeichnung:



Flächeninhalt des Dreiecks PRQ für $u = 2$: $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{PR} \cdot \overline{QR} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1 \text{ FE}$

Für $u = 2,5$ hat das Dreieck folgende Eckpunkte:
 $P(1|0)$, $R(2,5|0)$ und $Q(2,5|f(2,5))$, also $Q(2,5|-1,5625)$.

Flächeninhalt des Dreiecks PRQ für $u = 2,5$:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{PR} \cdot \overline{QR} = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 1,5625 \approx 1,17 \text{ FE}$$

Für $u = 2,5$ hat das Dreieck einen größeren Flächeninhalt als für $u = 2$.

4.4 $h(x) = 2 - 2\cos(0,5\pi x) = -2\cos(0,5\pi x) + 2$

Wertebereich von h:

Kleinsten y-Wert: $y = -2 + 2 = 0$

Größten y-Wert: $y = 2 + 2 = 4$

Wertebereich: $W = [0; 4]$

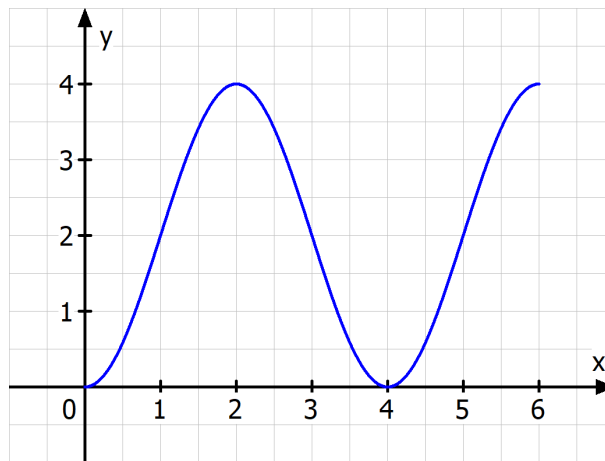
Skizze von h:

Das Schaubild hat auf der y-Achse einen Tiefpunkt.

Die Mittellinie des Schaubildes ist auf der Höhe $y = 2$.

Periode $p = \frac{2\pi}{0,5\pi} = 4$

Amplitude = 2



- 4.5 Es gilt $\int_0^4 h(x)dx > 0$, da die Fläche zwischen dem Schaubild von h und der x-Achse im Intervall $[0;4]$ oberhalb der x-Achse liegt.

Wenn das Schaubild von h um mindestens 2 Längeneinheiten nach unten verschoben wird, ist das Integral nicht mehr positiv, da dann die Flächenanteile unterhalb der x-Achse dann mindestens so groß sind wie die Flächenanteile oberhalb der x-Achse.