Hauptprüfung Fachhochschulreife 2022

Baden-Württemberg

Wahlteil: Aufgabe 3 Analysis

Hilfsmittel: Merkhilfe und WTR

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5e^{-0{,}5x} - 2$, $x \in \mathbb{R}$.
Ihr Schaubild ist K_f.

3.1 Bestimmen Sie die Gleichung der Asymptote von K_f.
Zeichnen Sie K_f für $-5 \le x \le 6$.
Wie müsste K_f verschoben werden, sodass das verschobene Schaubild die Asymptote mit der Gleichung y = 1 hat?
(5 Punkte)

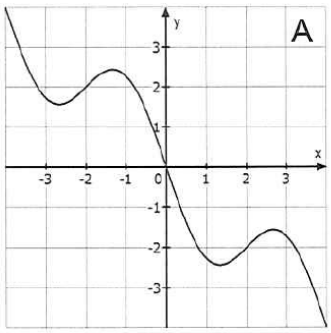
3.2 K_f schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein.
Bestimmen Sie deren Inhalt.
(5 Punkte)

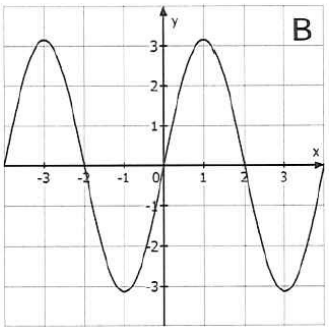
3.3 Weisen Sie durch Rechnung nach, dass die Gerade mit der Gleichung $y = -0{,}25x - 1{,}5$ Tangente an K_f ist.
(5 Punkte)

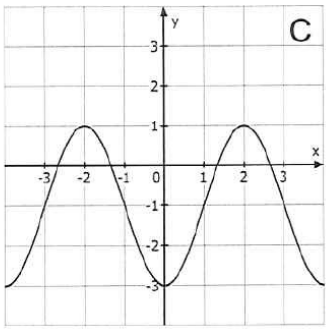
3.4 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von K_f. (3 Punkte)

3.5 Das Schaubild einer trigonometrischen Funktion verläuft durch den Tiefpunkt T(0|-4) und hat in H(4|1) einen Hochpunkt.
Geben Sie zwei mögliche Funktionsterme an. (6 Punkte)

3.6 Gegeben sind die Schaubilder einer Funktion g, ihrer Ableitungsfunktion g′ und einer Stammfunktion G von g.







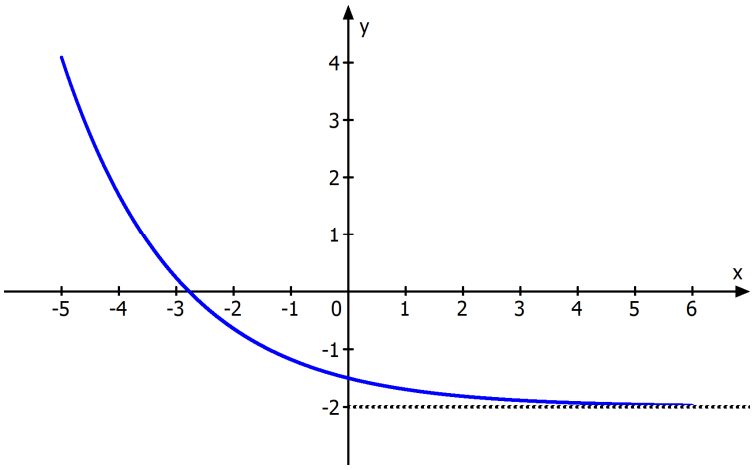
Ordnen Sie die Funktionen g, g′ und G den Schaubildern zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.
Bestimmen Sie mit Hilfe Ihrer Zuordnung den Inhalt der Fläche, die das Schaubild C auf dem Intervall [-2;2] mit der Geraden y = 1 einschließt.
(6 Punkte)

Lösung

3.1 $f(x) = 0{,}5e^{-0{,}5x} - 2$

Die Asymptote des Schaubildes existiert für $x \to +\infty$.
Die Gleichung der waagrechten Asymptote lautet y = -2.

Zeichnung: mit Hilfe der Asymptote und der Wertetabelle des TR



K_f müsste um 3 Einheiten nach oben in y-Richtung verschoben werden, damit die Asymptote y = 1 ist.

3.2 Zur Berechnung des Flächeninhalts wird die Nullstelle von f benötigt.

$$f(x) = 0: \frac{1}{2}e^{-0{,}5x} - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow e^{-0{,}5x} = 4$$
$$\Leftrightarrow x = -2\ln(4)$$

$$\int_{-2\ln(4)}^{0} (0{,}5e^{-0{,}5x} - 2)dx = \left[0{,}5 \cdot \frac{1}{-0{,}5}e^{-0{,}5x} - 2x\right]_{-2\ln(4)}^{0} = \left[-e^{-0{,}5x} - 2x\right]_{-2\ln(4)}^{0}$$

$$= -1 - (-4 + 4\ln(4)) \approx -2{,}55$$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt $A \approx 2{,}55$ FE

3.3 Es ist $f(x) = 0{,}5e^{-0{,}5x} - 2$ und $f'(x) = -0{,}25e^{-0{,}5x}$.
Die angegebene Gerade $y = -0{,}25x - 1{,}5$ besitzt die Steigung m = -0,25.

Berechnung der Stelle, an der das Schaubild von f die Steigung -0,25 besitzt:
Bedingung: $f'(x) = -0{,}25$

$-0{,}25 = -0{,}25e^{-0{,}5x}$

$\Leftrightarrow e^{-0{,}5x} = 1 \Leftrightarrow x = -2 \cdot \ln(1) = 0$

y-Wert der Gerade bei x = 0: y = -1,5

Nun ist zu prüfen, ob der Punkt A(0|-1,5) auch auf dem Schaubild von f liegt:
Es gilt $f(0) = -1{,}5$.

Damit ist gezeigt, dass die angegebene Gerade das Schaubild von f an der Stelle x = 0 berührt und daher eine Tangente ist.

3.4 Das Krümmungsverhalten eines Schaubildes wird mit der 2.Ableitung kontrolliert.

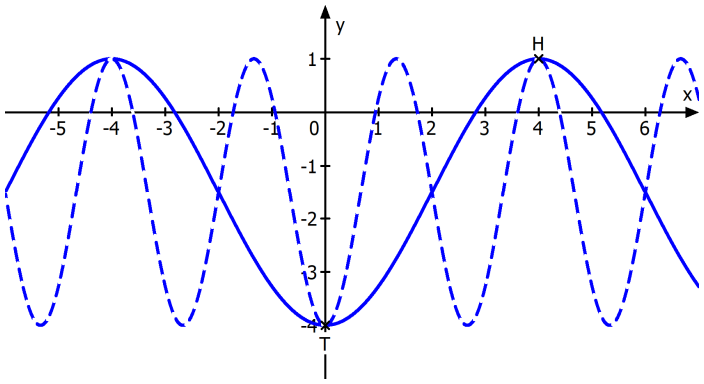
Aus 3.3 ergab sich $f'(x) = -0{,}25e^{-0{,}5x}$
Es gilt $f''(x) = 0{,}125e^{-0{,}5x}$.

Da die zweite Ableitungsfunktion für alle x-Werte nur positive Werte annehmen kann, ist das Schaubild von f überall linksgekrümmt.
Dies kann man auch anhand der Zeichnung aus 3.1 anschaulich überprüfen.

3.5 Zur Bestimmung einer Funktionsgleichung sollten die möglichen Schaubilder zunächst in ein Koordinatensystem eingezeichnet werden.

Da der Tiefpunkt auf der y-Achse liegt, lautet der allgemeine Funktionsansatz:
$f(x) = -a \cdot \cos(bx) + d$

Aufgrund der bekannten y-Werte des Hoch- und Tiefpunktes ist
$d = \frac{y_{max} + y_{min}}{2} = \frac{1 + (-4)}{2} = -1{,}5$
Die Amplitude ist a = 2,5



1.Möglichkeit:
Der waagrechte Abstand von T und H ist 4 und entspricht einer halben Periodenlänge (siehe durchgezogenes Schaubild). Daher ist $p = 8$.

Daraus folgt $8 = \frac{2\pi}{b} \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{4}$.

Mögliche Funktionsgleichung: $f(x) = -2{,}5 \cdot \cos(\frac{\pi}{4}x) - 1{,}5$

2.Möglichkeit:
Der waagrechte Abstand von T und H ist 4 und entspricht 1,5 Periodenlängen (siehe gestricheltes Schaubild). Daher ist $p = \frac{4}{1,5} = \frac{8}{3}$.

Daraus folgt $\frac{8}{3} = \frac{2\pi}{b} \Leftrightarrow b = \frac{3\pi}{4}$.

Mögliche Funktionsgleichung: $f(x) = -2,5 \cdot \cos(\frac{3\pi}{4}x) - 1,5$

3.6 Die Zuordnung kann über folgende Regel erfolgen:

Dort wo G Wendestellen besitzt muss g Extremstellen besitzen.
Dort wo g Extremstellen besitzt muss g' Nullstellen besitzen.

C hat Extremstellen bei x = -2, x = 0 und x = 2.
B hat Nullstellen bei x = -2, x = 0 und x = 2.
A hat Wendestellen bei x =-2, x = 0 und x = 2.

Somit gilt: G gehört zu A, g gehört zu C und g' gehört zu B.

$$A = \int_{-2}^{2} (1 - g(x))dx = \left[x - G(x)\right]_{-2}^{2} = 2 - G(2) - (-2 - G(-2))$$

Wegen G(2) = -2 und G(-2) = 2 (siehe Schaubild A) folgt daher
$A = 2 - (-2) - (-2 - 2) = 8$