Hauptprüfung Fachhochschulreife 2022

Baden-Württemberg

Wahlteil: Aufgabe 2 Analysis

Hilfsmittel: Merkhilfe und WTR

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$, $x \in \mathbb{R}$.
Ihr Schaubild ist K_f.

2.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- Tief- und Wendepunkte von K_f.
Zeichnen Sie K_f für $0 \le x \le 3$.

(10 Punkte)

2.2 Zeigen Sie, dass f auch in der Form $f(x) = (x-1)^2 \cdot (2x-5)$ dargestellt werden kann. K_f schließt mit der x-Achse eine Fläche ein.
Berechnen Sie deren Inhalt. (7 Punkte)

2.3 Überprüfen Sie, ob folgende Behauptungen zutreffen und begründen Sie Ihre Antwort.

(1) K_f und die Gerade $y = 12x - 5$ berühren sich im Punkt P(0|-5).
(2) Es gibt eine Tangente an K_f, welche die Steigung -2 hat.

(4 Punkte)

Gegeben sind die Funktionen g und h mit
$g(x) = e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$ und $h(x) = -e^{2x} + 3$, $x \in \mathbb{R}$.
Die Schaubilder sind K_g und K_h.

2.4 Beschreiben Sie, wie das Schaubild von h aus dem Schaubild von g hervorgeht.

(2 Punkte)

2.5 Geben Sie jeweils die Koordinaten der Schnittpunkte von K_g und K_h mit der y-Achse an.
Skizzieren Sie K_g und K_h.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von K_g und K_h.

(7 Punkte)

Lösung

2.1 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$

Bedingung für Extrempunkte: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

$f''(x) = 12x - 18$

$f'''(x) = 12$

$6x^2 - 18x + 12 = 0 \mid :6$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

abc-Formel: $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$ $x_1 = 2$ $x_2 = 1$

$f''(2) = 6 > 0$, damit existiert ein Tiefpunkt

$f(2) = -1$: Tiefpunkt T(2|-1)

$f''(1) = -6 < 0$, damit existiert ein Hochpunkt

$f(1) = 0$: Hochpunkt H(1|0)

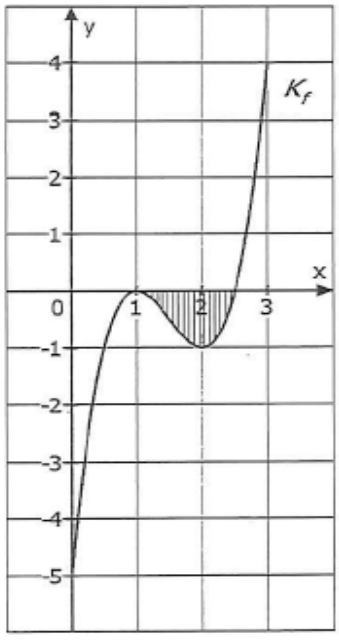
Bedingung für Wendepunkte: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$12x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}5$

$f'''(1{,}5) = 12 \neq 0$ also existiert ein Wendepunkt

$f(1{,}5) = -0{,}5$: Wendepunkt $W(1{,}5 \mid -0{,}5)$

Zeichnung (inklusive der Fläche aus Aufgabe 2.2):
Einzeichnen der berechneten Extrem- und Wendepunkte und ggf. Nutzung der Wertetabelle des Taschenrechners.



2.2 $f(x)=(x-1)^2\cdot(2x-5)$

Der Nachweis kann erfolgen, indem die Klammern des Funktionsterms ausmultipliziert werden.

$$f(x)=(x-1)^2\cdot(2x-5)=\left(x^2-2x+1\right)\cdot\left(2x-5\right)=2x^3-5x^2-4x^2+10x+2x-5$$
$$=2x^3-9x^2+12x-5$$

Dies entspricht dem angegebenen Funktionsterm.

Zur Berechnung des Flächeninhalts müssen die Nullstellen berechnet werden:

$f(x)=0:(x-1)^2\cdot(2x-5)=0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt
I) $x-1=0\Leftrightarrow x=1$
II) $2x-5=0\Leftrightarrow x=2{,}5$

$$\int_1^{2,5} f(x)dx=\left[2\cdot\frac{1}{4}x^4-9\cdot\frac{1}{3}x^3+12\cdot\frac{1}{2}x^2-5x\right]_1^{2,5}=\left[\frac{1}{2}x^4-3x^3+6x^2-5x\right]_1^{2,5}$$
$$=-\frac{75}{32}-(-1{,}5)=-\frac{27}{32}$$

Der Flächeninhalt beträgt $A=\frac{27}{32}\approx 0{,}84$ FE.

2.3 (1)
Es ist $f(x)=2x^3-9x^2+12x-5$ und $g(x)=12x-5$.
Die Ableitungsfunktionen lauten $f'(x)=6x^2-18x+12$ und $g'(x)=12$.

Bedingung für die Berührung im Punkt P(0|-5):

$f(0)=g(0)=-5$ diese Bedingung ist erfüllt
$f'(0)=g'(0)$ diese Bedingung ist erfüllt, da $f'(0)=g'(0)=12$ ist

Die Behauptung stimmt.

(2)
Bedingung: $f'(x)=-2$
$6x^2-18x+12=-2\Leftrightarrow 6x^2-18x+14=0$

Lösung mit der abc-Formel: $x_{1,2}=\frac{18\pm\sqrt{324-4\cdot6\cdot14}}{12}=\frac{18\pm\sqrt{-12}}{12}$
Da die Zahl unter der Wurzel negativ ist, existiert keine Lösung.

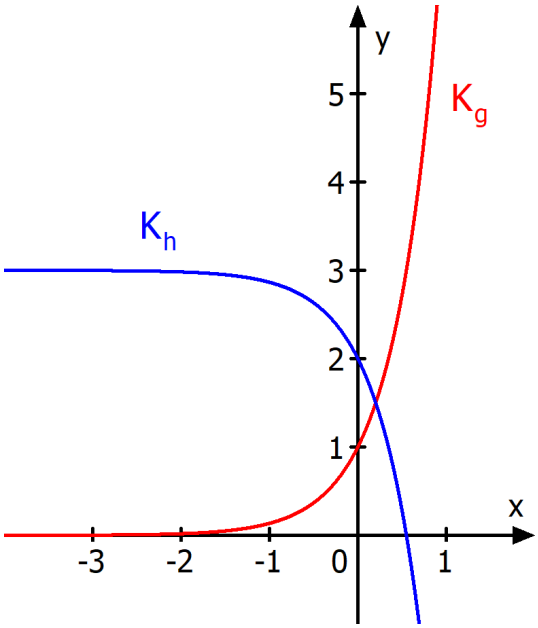
Die Behauptung stimmt nicht.

2.4 $g(x) = e^{2x}$

1.Schritt: Spiegelung des Schaubildes an der x-Achse: $-e^{2x}$
2.Schritt: Verschiebung des Schaubildes um 3 nach oben (in y-Richtung)
ergibt $h(x) = -e^{2x} + 3$

2.5 Schnittpunkt des Schaubildes von g bzw. von h mit der y-Achse:
$g(0) = 1 \Rightarrow S_y(0 \mid 1)$
$h(0) = 2 \Rightarrow S_y(0 \mid 2)$

Skizze: Hierfür nutzt man die Wertetabelle des Taschenrechners.



Schnittpunkt der Schaubilder: $g(x) = h(x)$
$e^{2x} = -e^{2x} + 3 \quad | +e^{2x}$
$\Leftrightarrow 2e^{2x} = 3$
$\Leftrightarrow e^{2x} = 1{,}5 \Leftrightarrow x = 0{,}5 \cdot \ln(1{,}5)$

Berechnung des y-Wertes des Schnittpunktes: $g(0{,}5 \cdot \ln(1{,}5)) = e^{2 \cdot 0{,}5 \cdot \ln(1{,}5)} = 1{,}5$
Koordinaten des Schnittpunktes: $S(0{,}5 \cdot \ln(1{,}5) \mid 1{,}5)$