

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2022

Baden-Württemberg

Pflichtteil Variante 1

Hilfsmittel: keine

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Aufgabe 1:

- 1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$, $x \in \mathbb{R}$.
Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Symmetrie.
Berechnen Sie die Nullstellen von f . (6 Punkte)
- 1.2 Gegeben ist die Funktion p mit $p(x) = -x^2 - 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.
Weisen Sie nach, dass der Punkt $E(-1|4)$ ein Extrempunkt des Schaubildes von p ist. (4 Punkte)
- 1.3 Lösen Sie die Gleichung $e^{-2x} - 5e^{-x} = 0$. (4 Punkte)
- 1.4 Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = 6 - 4e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie die erste und die zweite Ableitung von h . (2 Punkte)
- 1.5 Berechnen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $P(2|4)$ an das Schaubild der Funktion k mit $k(x) = x^3 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$. (3 Punkte)
- 1.6 Für eine Funktion g gilt für $-1 \leq x \leq 4$:
- $g(x) > 1$
 - $g'(x) < 0$
 - $g''(x) > 0$
- Beschreiben Sie für jede der drei genannten Eigenschaften, welche Bedeutung diese für den Verlauf des Schaubildes von g besitzen.
Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Schaubildes. (6 Punkte)
- 1.7 Das Schaubild einer trigonometrischen Funktion ist durch $y = 5\cos(bx) - d$ mit $x, b, d \in \mathbb{R}$ gegeben.
Bestimmen Sie b und d so, dass die Periodenlänge $p = \frac{1}{2}$ beträgt und das Schaubild Schnittpunkte mit der x -Achse hat.
Geben Sie den Funktionsterm und den Wertebereich an, die zu Ihrer Wahl von b und d passen. (5 Punkte)

Lösung

1.1 Es ist $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y -Achse, da im Funktionsterm nur geraden Hochzahlen vorkommen.

Bedingung für Nullstelle: $f(x) = 0$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad \text{Substitution: } x^2 = u$$

$$u^2 - 5u + 4 = 0$$

$$\text{abc-Formel: } u_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \quad u_1 = 4 \quad u_2 = 1$$

$$\text{Rücksubstitution: } x^2 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 1$$

Die Funktion hat 4 Nullstellen.

1.2 $p(x) = -x^2 - 2x + 3$

$$p'(x) = -2x - 2$$

$$p''(x) = -2$$

Bedingung, dass $E(-1|4)$ ein Extrempunkt ist:

$$p(-1) = 4 \quad \text{und} \quad p'(-1) = 0 \quad \text{und} \quad p''(-1) \neq 0$$

$$p(-1) = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 3 = 4 \quad \text{ist erfüllt}$$

$$p'(-1) = -2 \cdot (-1) - 2 = 0 \quad \text{ist erfüllt}$$

$$p''(-1) = -2 \neq 0 \quad \text{ist erfüllt.}$$

Damit ist $E(-1|4)$ ein Extrempunkt.

1.3 $e^{-2x} - 5e^{-x} = 0$

Ausklammern von e^{-x} : $e^{-x} \cdot (e^{-x} - 5) = 0$ Lösung mit Satz vom Nullprodukt

I) $e^{-x} = 0$ ist nicht lösbar

II) $e^{-x} - 5 = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 5 \Leftrightarrow -x = \ln(5) \Leftrightarrow x = -\ln(5)$

1.4 Ableitungen von $h(x) = 6 - 4e^{-2x}$

$$h'(x) = -4 \cdot (-2) \cdot e^{-2x} = 8 \cdot e^{-2x}$$

$$h''(x) = 8 \cdot (-2) \cdot e^{-2x} = -16 \cdot e^{-2x}$$

1.5 $k(x) = x^3 - 2x$
Es gilt $k'(x) = 3x^2 - 2$.

Ansatz für die Tangentengleichung: $y = mx + c$

Berechnung der Tangentensteigung in $P(2|4)$: $m = k'(2) = 10$

Einsetzen von P und m in den Ansatz der Tangentengleichung:

$$4 = 10 \cdot 2 + c \Leftrightarrow c = -16$$

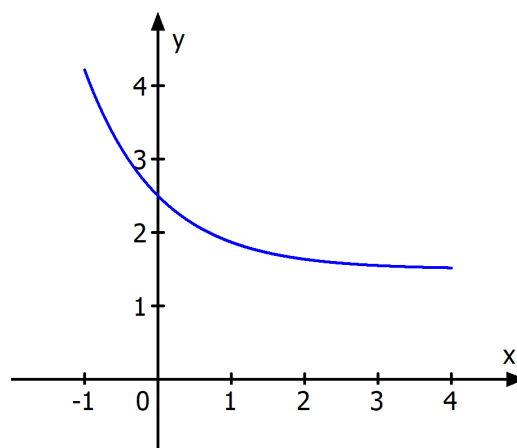
Gleichung der Tangente: $y = 10x - 16$

- 1.6 $g(x) > 1$: Die y -Werte der Punkte auf dem Schaubild von g sind größer als 1.
Oder: Das Schaubild verläuft oberhalb der Gerade $y = 1$.

$g'(x) < 0$: Die Steigungen der Tangenten an das Schaubild von g sind negativ.
Oder: Die Funktion ist monoton fallend.

$g''(x) > 0$: Das Schaubild von g ist linksgekrümmt.

Skizze für ein mögliches Schaubild im Intervall $-1 \leq x \leq 4$:



1.7 $y = 5 \cos(bx) - d$

Formel für die Periode: $p = \frac{2\pi}{b}$

$$\frac{1}{2} = \frac{2\pi}{b} \Leftrightarrow b = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

Berechnung der Schnittpunkte mit der x-Achse:

$$5 \cos(4\pi \cdot x) - d = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(4\pi \cdot x) = \frac{d}{5}$$

Damit die Gleichung eine Lösung besitzt, muss die linke Seite der Gleichung einen Wert zwischen -1 und 1 besitzen.

Das heißt d kann einen beliebigen Wert zwischen -5 und 5 besitzen.

Also wäre beispielsweise $d = 4$ ein mögliches Ergebnis.

Ein möglicher Funktionsterm lautet $y = 5 \cos(4\pi \cdot x) - 4$.

kleinster y-Wert: $y = -4 - 5 = -9$

größter y-Wert: $y = -4 + 5 = 1$

Wertebereich: $W = [-9; 1]$