

Analytische Geometrie

Spiegelung und Symmetrie

Allg. Gymnasien: ab J1 / Q1
Beruf. Gymnasien: ab Klasse 12

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2018

Aufgabe 1:

- a) Der Punkt $P(4/2/-5)$ wird am Punkt $Z(3/-1/-8)$ gespiegelt.
Berechne die Koordinaten des Bildpunktes P^* .
- b) Der Punkt $P(-1/-2/-3)$ wird am Punkt Z gespiegelt. Man erhält den Bildpunkt $P^*(8/-8/6)$.
Berechne die Koordinaten des Punktes Z .

Aufgabe 2:

Der Punkt $A(-1/-3/5)$ wird an einer Ebene E gespiegelt. Sein Bildpunkt ist $A'(6/0/5)$.
Bestimme eine Gleichung der Symmetrieebene E .

Aufgabe 3:

- a) Der Punkt $P(7/5/3)$ wird an der Ebene $E: -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 30$ gespiegelt.
Bestimme die Koordinaten des Bildpunktes P^* .

b) Der Punkt $P(-8/13/-1)$ wird an der Ebene $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ gespiegelt.

Bestimme die Koordinaten des Bildpunktes P^* .

Aufgabe 4:

Der Punkt $P(3/3/3)$ wird an der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ gespiegelt.

Bestimme die Koordinaten des Bildpunktes P^* .

Aufgabe 5:

Die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ soll an der Ebene $E: x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 21$ gespiegelt werden.

Bestimme eine Gleichung der Bildgeraden g^* .

Aufgabe 6:

Die Gerade g , die die Ebene E im Punkt S schneidet, soll an E gespiegelt werden.
Beschreibe die Vorgehensweise zur Bestimmung einer Gleichung der Bildgeraden g^* .

Lösungen

Aufgabe 1:

a) Es gilt $\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PZ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 2-6 \\ -5-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix}$

Koordinaten von P*(2/-4/-11).

b) Z ist der Mittelpunkt von P und P*:

$$\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PP^*} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4,5 \\ -2-3 \\ -3+4,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ -5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

Koordinaten von Z(3,5/-5/1,5).

Aufgabe 2:

Der Normalenvektor der Symmetrieebene lautet $\vec{n} = \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Außerdem liegt der Mittelpunkt Z der Strecke AA' auf der Ebene:

$$\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3,5 \\ -3+1,5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ -1,5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Gleichung der Symmetrieebene: E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2,5 \\ -1,5 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Aufgabe 3:

a) Aufstellen einer Hilfsgerade h, die durch P und orthogonal zu E verläuft:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnittpunkt von h mit E: } -3(7-3r) + 2(5+2r) + 4(3+4r) = 30$$

$$\Rightarrow -21 + 9r + 10 + 4r + 12 + 16r = 30 \Rightarrow 29r + 1 = 30 \Rightarrow r = 1$$

Einsetzen von r = 1 in die Gerade ergibt den Schnittpunkt S(4/7/7).

$$\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \text{Koordinaten von P*(1/9/11).}$$

b) Ansatz für Koordinatengleichung von E: $3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = d$

Einsetzen des Punktes A(-2/5/3): $-6 - 20 + 6 = d \Rightarrow d = -20$

Koordinatengleichung E: $3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -20$

Aufstellen einer Hilfsgerade h, die durch P und orthogonal zu E verläuft:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt von h mit E: $3(-8 + 3r) - 4(13 - 4r) + 2(-1 + 2r) = -20$

$$\Rightarrow -24 + 9r - 52 + 16r - 2 + 4r = -20 \Rightarrow 29r = 58 \Rightarrow r = 2$$

Einsetzen von $r = 2$ in die Gerade ergibt den Schnittpunkt S(-2/5/3).

$$\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{Koordinaten von } P^*(4/-3/7).$$

Aufgabe 4:

Im ersten Schritt muss der Lotfußpunkt F auf der Geraden g bestimmt werden.

Ein allgemeiner Punkt auf g hat die Koordinaten F(2+5t/10-3t/-3+2t).

$$\text{Es ist } \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} -1+5t \\ 7-3t \\ -6+2t \end{pmatrix}$$

$$\text{Der Lotfußpunkt ergibt sich mit der Bedingung } \overrightarrow{PF} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} -1+5t \\ 7-3t \\ -6+2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -5 + 25t - 21 + 9t - 12 + 4t = 0 \Rightarrow -38 + 38t = 0 \Rightarrow t = 1$$

Der Lotfußpunkt hat die Koordinaten F(7/7/-1).

$$\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{Koordinaten von } P^*(11/11/-5).$$

Aufgabe 5:

Zunächst wird der Schnittpunkt der Gerade g mit der Ebene E berechnet:

$$2 + 2t + 4(1 + 0t) - 2(3 + t) = 21 \\ \Rightarrow 2 + 2t + 4 - 6 - 2t = 21 \Rightarrow 0 = 21 \text{ falsche Aussage}$$

Dies bedeutet, dass die Gerade parallel zu E verläuft.

Die Bildgerade g^* ist parallel zur Geraden g.

Der Richtungsvektor von g^* entspricht folglich dem Richtungsvektor von g.

Um einen Punkt von g^* zu erhalten, muss ein beliebiger Punkt von g an der Ebene E gespiegelt werden.

Der Punkt A(2/1/3) wird an der Ebene E gespiegelt:

Aufstellen einer Hilfsgerade h, die durch A und orthogonal zu E verläuft:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnittpunkt von h mit E: } 2 + r + 4(1 + 4r) - 2(3 - 2r) = 21 \\ \Rightarrow 2 + r + 4 + 16r - 6 + 4r = 21 \Rightarrow 21r = 21 \Rightarrow r = 1$$

Einsetzen von $r = 1$ in die Gerade ergibt den Schnittpunkt S(3/5/1).

$$\overrightarrow{OA^*} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{Koordinaten von } A^*(4/9/-1).$$

$$\text{Gleichung der Bildgeraden } g^*: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6:

1.Schritt: Berechnung des Schnittpunktes S der Geraden g mit der Ebene E.

2.Schritt: Spiegle einen beliebigen Punkt A von g an der Ebene E:

- Aufstellen einer Hilfsgeraden h durch A senkrecht zu E
- Berechnung des Schnittpunktes L von h mit E ergibt $\overrightarrow{AL}$
- Berechnung des Spiegelpunktes A^* : $\overrightarrow{OA^*} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AL}$

3.Schritt: Aufstellen der Gleichung der Bildgeraden g^* , die durch die Punkte S und A^* verläuft: $g^*: \vec{x} = \overrightarrow{OS} + t \cdot \overrightarrow{SA^*}$