

Analytische Geometrie

Orthogonale Vektoren - Skalarprodukt

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2018

Aufgabe 1:

Berechne das Skalarprodukt der beiden Vektoren.

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

Berechne die Werte von a, b und c so, dass die beiden Vektoren orthogonal zueinander sind.

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ b \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ b \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \vec{a} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

Bestimme den Wert von a, dass sich die beiden Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ und

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ a \end{pmatrix} \text{ orthogonal schneiden.}$$

Aufgabe 4:

Überprüfe, in welcher der Ecken A(8/1/10), B(5/0/9) oder C(4/2/10) das Dreieck ABC einen rechten Winkel hat.

Aufgabe 5:

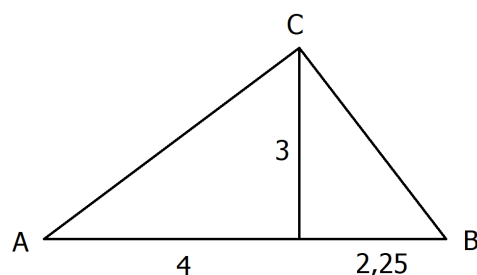
Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Bestimme einen dritten Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$, so dass der Vektor $\vec{c}$ zu den beiden anderen

Vektoren orthogonal ist.

Aufgabe 6:

Überprüfe rechnerisch (ohne Nutzung des Satzes von Pythagoras), ob das Dreieck ABC im Punkt C einen rechten Winkel besitzt.



Lösungen**Aufgabe 1:**

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = -5 + 6 + 2 = 3$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{2} \cdot 3 + 2 \cdot \sqrt{2} - 4 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$

Aufgabe 2:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 + 3a - 4 = 3a - 6 \Rightarrow 3a - 6 = 0 \Rightarrow a = 2$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + 2b + 2b = 4b + 1 \Rightarrow 4b + 1 = 0 \Rightarrow b = -0,25$

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -c + 3c + 4 = 2c + 4 \Rightarrow 2c + 4 = 0 \Rightarrow c = -2$

Aufgabe 3:

Die Geraden sind orthogonal, wenn die Richtungsvektoren der Geraden orthogonal zueinander sind:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ a \end{pmatrix} = -3 + 4a - 7a = -3 - 3a \Rightarrow -3 - 3a = 0 \Rightarrow a = -1$$

Aufgabe 4:

Es gilt $\overline{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\overline{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overline{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Es gilt $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 3 - 2 - 1 = 0$.

Das Dreieck besitzt im Punkt B einen rechten Winkel.

Aufgabe 5:

Bedingung 1: $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow 2 + 3a + b = 0$ (*)

Bedingung 2: $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow 1 - 2a + 4b = 0$ (**)

Aus (*) folgt: $b = -2 - 3a$

Einsetzen in (**): $1 - 2a + 4(-2 - 3a) = 0 \Rightarrow -7 - 14a = 0 \Rightarrow a = -0,5$

Mit (*) folgt $b = -2 + 1,5 = -0,5$.

Aufgabe 6:

Das Dreieck ABC ist im Punkt C rechtwinklig, wenn die Vektoren $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$ orthogonal zueinander sind.

Aufgrund der angegebenen Seitenlängen gilt: $\overline{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overline{CB} = \begin{pmatrix} 2,25 \\ -3 \end{pmatrix}$

Es gilt: $\overline{AC} \cdot \overline{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2,25 \\ -3 \end{pmatrix} = 9 - 9 = 0$.

Damit sind die Vektoren zueinander orthogonal und das Dreieck ist rechtwinklig.