

Analytische Geometrie

Schnittwinkel und Winkel zwischen Vektoren

Allg. Gymnasien: ab J1 / Q1
Beruf. Gymnasien: ab Klasse 12

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2018

Aufgabe 1:

Berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2:

Die Punkte A(-1/0/2), B(2/4/2) und C(-5/3/10) bilden ein Dreieck.

- Berechne die Länge der Seiten des Dreiecks ABC.
- Weise nach, dass das Dreieck bei A einen rechten Winkel hat.
- Bestimme die Größen der Innenwinkel des Dreiecks.
- Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

Aufgabe 3:

Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden. Bestimme die Größe des Schnittwinkels.

- $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4:

Gegeben sind zwei Ebenen. Bestimme die Größe ihres Schnittwinkels.

- $E_1: 3x_1 - x_2 + 8x_3 = 4$ und $E_2: x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0$

$$b) E_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ und } E_2: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

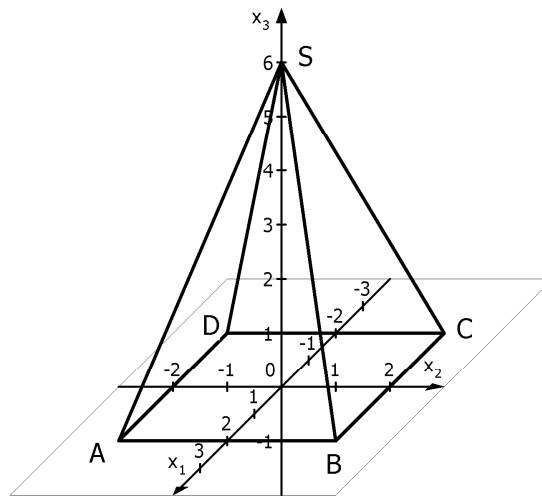
Aufgabe 5:

Die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ schneidet die Ebene $E: 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 20$.

Bestimme die Größe des Schnittwinkels.

Aufgabe 6:

Die Figur zeigt eine quadratische Pyramide mit der Grundseite 4 cm und der Höhe 6 cm.



- Bestimme die Größe des Winkels, den zwei benachbarte Seitenkanten an der Spitze S haben.
- Bestimme die Größe des Winkels zwischen der Grundfläche und einer Seitenfläche der Pyramide.
- Bestimme die Größe des Winkels zwischen der Grundfläche und einer Seitenkante.

Lösungen

Aufgabe 1:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{20 + 0 - 6}{\sqrt{16 + 0 + 9} \cdot \sqrt{25 + 196 + 4}} = \frac{14}{5 \cdot 15} \Rightarrow \alpha \approx 79,2^\circ$$

Aufgabe 2:

a) Länge der Dreiecksseiten:

$$|\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 16 + 0} = 5 \quad |\overline{AC}| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16 + 9 + 64} = \sqrt{89}$$

$$|\overline{BC}| = \left| \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{49 + 1 + 64} = \sqrt{114}$$

b) Das Dreieck ist im Punkt A rechtwinklig, wenn $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$ ist:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = -12 + 12 + 0 = 0 \text{ womit der rechte Winkel gezeigt ist.}$$

c) Innenwinkel bei A: 90° (siehe Teilaufgabe b)

$$\text{Innenwinkel bei B: } \cos \beta = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}}{\sqrt{9 + 16} \cdot \sqrt{49 + 1 + 64}} = \frac{21 + 4}{5 \cdot \sqrt{114}} \Rightarrow \beta = 62,1^\circ$$

Aufgrund der Winkelsumme ergibt sich für den dritten Winkel:

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - 62,1^\circ = 27,9^\circ$$

d) Flächeninhalt des Dreiecks:

$$\text{Da das Dreieck bei A rechtwinklig ist, gilt: } A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{89} \approx 23,6 \text{ FE}$$

Aufgabe 3:

$$\text{a) } \cos \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1 + 16 + 4} \cdot \sqrt{25 + 4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{30}} \Rightarrow \alpha = 87,7^\circ$$

$$\text{b) } \cos \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{4 + 4 + 9} \cdot \sqrt{0 + 49 + 9}} = \frac{23}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{58}} \Rightarrow \alpha = 42,9^\circ$$

Aufgabe 4:

$$\text{a) } \cos \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{9+1+64} \cdot \sqrt{1+16+4}} = \frac{15}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{21}} \Rightarrow \alpha = 67,6^\circ$$

$$\text{b) } \cos \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{9+4+1} \cdot \sqrt{36+25+16}} = \frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{77}} \Rightarrow \alpha = 83^\circ$$

Aufgabe 5:

$$\sin \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{16+4+49} \cdot \sqrt{9+36+1}} = \frac{12+12-7}{\sqrt{69} \cdot \sqrt{46}} \Rightarrow \alpha = 17,6^\circ$$

Aufgabe 6:

Die Pyramide hat die Eckpunkte A(2/-2/0), B(2/2/0), C(-2/2/0), D(-2/-2/0) und S(0/0/6).

a) Hier muss der Schnittwinkel zweier Geraden berechnet werden.

Die Richtungsvektoren der Geraden sind z.B. $\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$\cos \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{4+4+36} \cdot \sqrt{4+4+36}} = \frac{36}{\sqrt{44} \cdot \sqrt{44}} \Rightarrow \alpha = 35,1^\circ$$

b) Hier muss der Schnittwinkel zweier Ebenen berechnet werden.

Die Grundfläche ABCD liegt in der x_1x_2 -Ebene mit der Koordinatengleichung $x_3 = 0$.

Der Normalenvektor dieser Ebene ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Als Seitenfläche wird die Fläche BCS gewählt.

Parametergleichung der Ebene durch BCS: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Berechnung des Normalenvektors: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 8 \end{pmatrix}$ bzw. vereinfacht $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnittwinkel: $\cos \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{0+9+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \alpha = 71,6^\circ$

- c) Hier muss der Schnittwinkel einer Ebene und einer Geraden berechnen.
Die Grundfläche ABCD liegt in der x_1x_2 -Ebene mit der Koordinatengleichung $x_3 = 0$.

Der Normalenvektor dieser Ebene ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Als Seitenkante wählen wir die Kante CS mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Schnittwinkel: $\sin \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{4+4+36}} = \frac{6}{\sqrt{44}} \Rightarrow \alpha = 64,8^\circ$