

Analytische Geometrie

Lineare Gleichungssysteme

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Dezember 2018

Aufgabe 1:

Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{lcl} & x_1 & + 4x_2 & + x_3 & = & 10 \\ \text{a)} & x_1 & + 2x_2 & + x_3 & = & 8 \\ & x_1 & + x_2 & - x_3 & = & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} & x_1 & + x_2 & + x_3 & = & 0 \\ \text{b)} & 2x_1 & + x_2 & + x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} & 2x_1 & + x_2 & + 2x_3 & = & 4 \\ \text{c)} & x_1 & & - 3x_3 & = & -1 \\ & 3x_1 & + 2x_2 & & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} & x_1 & + 2x_2 & - 3x_3 & = & 1 \\ \text{d)} & -2x_1 & - x_2 & + 6x_3 & = & 4 \\ & -x_1 & + 5x_2 & + 3x_3 & = & 7 \end{array}$$

Aufgabe 2:

Gib ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen an, das die folgende Lösungsmenge hat. Hierbei sollen in allen 3 Gleichungen immer alle 3 Variablen vorkommen.

$$\text{a) } L = \{ (-1 ; 3 ; 2) \}$$

$$\text{b) } L = \{ (1-t ; 4 ; t) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$\text{c) } L = \{ \}$$

Aufgabe 3:

Sind die Aussagen wahr oder falsch?

Gib eine kurze Begründung an.

- Jedes lineare Gleichungssystem in Stufenform, das weniger Gleichungen als Variablen aufweist, hat unendlich viele Lösungen.
- Wenn man ein lineares Gleichungssystem durch Äquivalenzumformungen auf eine dreieckige Stufenform bringen kann, so hat es keine Lösung.
- Hat ein lineares Gleichungssystem mehr Gleichungen als Variablen, so hat es keine Lösung.
- Ist bei einem linearen Gleichungssystem mit gleicher Anzahl von Gleichungen und Variablen eine der Gleichungen ein Vielfaches einer zweiten, so hat das Gleichungssystem keine Lösung.

Lösungen

Aufgabe 1:

Um die Gleichungssysteme zu lösen, werden diese in Stufenform umgeformt.
Die Pfeile geben an, das zwei Zeilen miteinander addiert werden.

a)

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & +4x_2 & +x_3 & = & 10 \\
 x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 8 & | \cdot (-1) \leftarrow \\
 x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 3 & | \cdot (-1) \leftarrow
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rclcl}
 x_1 & +4x_2 & +x_3 & = & 10 \\
 & +2x_2 & & = & 2 \\
 & +3x_2 & +2x_3 & = & 7
 \end{array}$$

Aus der 2. Zeile: $2x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 1$

Aus der 3. Zeile: $3x_2 + 2x_3 = 7 \Rightarrow 3 + 2x_3 = 7 \Rightarrow x_3 = 2$

Aus der 1. Zeile: $x_1 + 4 + 2 = 10 \Rightarrow x_1 = 4$

Lösungsmenge: $L = \{(4/1/2)\}$

b)

Es fällt auf, dass das LGS nur 2 Gleichungen, aber 3 Variablen besitzt.
Da ein Überschuss an Variablen vorliegt, kann das LGS nicht mehr eindeutig lösbar sein.
Es gibt also entweder gar keine Lösung oder unendlich viele Lösungen.

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\
 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 & | \cdot (-1) \leftarrow
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rclcl}
 x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\
 -x_1 & & & = & -1
 \end{array}$$

Aus der 2. Zeile: $-x_1 = -1 \Rightarrow x_1 = 1$

Aus der 1. Zeile: $1 + x_2 + x_3 = 0$

Es existieren unendlich viele Lösungen. Setze $x_2 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$

Eingesetzt in die 1. Zeile: $1 + t + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -1 - t$

Lösungsmenge: $L = \{(1/t/-1-t), t \in \mathbb{R}\}$

c)

Da in dem LGS links oben eine möglichst einfache Zahl stehen soll, werden die ersten beiden Zeilen vertauscht.

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & & -3x_3 & = & -1 & | \cdot (-2) \leftarrow & | \cdot (-3) \leftarrow \\
 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 4 & \leftarrow & \\
 3x_1 & +2x_2 & & = & 2 & \leftarrow &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & & -3x_3 & = & -1 \\
 & +x_2 & +8x_3 & = & 6 & | \cdot (-2) \leftarrow \\
 & +2x_2 & +9x_3 & = & 5 & \leftarrow
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & & -3x_3 & = & -1 \\
 & +x_2 & +8x_3 & = & 6 \\
 & & -7x_3 & = & -7
 \end{array}$$

Aus der 3. Zeile: $x_3 = 1$

Aus der 2. Zeile: $x_2 + 8 = 6 \Rightarrow x_2 = -2$

Aus der 1. Zeile: $x_1 - 3 = -1 \Rightarrow x_1 = 2$

Lösungsmenge $L = \{ (2/-2/1) \}$

d)

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 1 \\ -2x_1 & -x_2 & +6x_3 & = 4 \\ -x_1 & +5x_2 & +3x_3 & = 7 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \cdot 2 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 1 \\ & 3x_2 & & = 6 \\ & 7x_2 & & = 8 \end{array}$$

Aus der 2. Zeile folgt $x_2 = 2$

Aus der 3. Zeile folgt hingegen $x_2 = \frac{8}{7}$ was einen Widerspruch zur 2. Zeile darstellt.

Daher existiert keine Lösung. Es ist $L = \{ \}$.

Aufgabe 2:

- a) Strategie: Schreibe auf die linke Seite beliebige Terme mit den 3 Variablen und setze dann die gegebenen Lösungen ein. Dann ergibt sich die rechte Seite der drei Zeilen.

Eine Möglichkeit (von unendlich verschiedenen) wäre folgende:

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 4 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = -2 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \end{array}$$

- b) Strategie wie in a).

Allerdings müssen die Terme links so gewählt werden, dass sich der Parameter t beim Verrechnen der drei Variablen auflöst.

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 5 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = -3 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 6 \end{array}$$

- c) Schreibe drei Gleichungen auf, wobei bei einer Gleichung auf der linken Seite das Vielfache einer anderen Gleichung steht, auf der rechten Seite aber nicht. (siehe im Beispiel Gleichung 1 und 2; was in Gleichung 3 steht, spielt keine Rolle)

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 5 \\ 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = 7 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 6 \end{array}$$

Aufgabe 3:

- a) Die Aussage ist falsch. Das Gleichungssystem hat definitiv keine eindeutige Lösung, es könnte aber anstatt unendlich vielen Lösungen auch gar keine Lösung besitzen.
- b) Die Aussage ist falsch. Liegt eine dreieckige Stufenform vor, so besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung.
- c) Die Aussage ist falsch. Auch ein Gleichungssystem, das mehr Gleichungen als Variablen besitzt, kann eine eindeutige Lösung oder sogar unendlich viele Lösungen besitzen.
- d) Die Aussage ist falsch. Das Gleichungssystem könnte auch gar keine Lösung besitzen.

$$\begin{array}{rclcl} & x_1 & +x_2 & +x_3 & = 5 \\ \text{Beispiel:} & 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = 10 \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & = 6 \end{array}$$

Die ersten beiden Gleichungen sind Vielfache zu einander.

Bei der dritten Gleichung entsteht jedoch ein Widerspruch zur ersten, so dass das gesamte Gleichungssystem gar keine Lösung besitzt.