

Analytische Geometrie

Gegenseitige Lage zweier Ebenen

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

April 2019

Aufgabe 1:

Untersuche, welche der Ebenen $E: -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8$, $F: 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 8$ und

$G: 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 4$ parallel sind.

Bestimme ansonsten die Gleichung der Schnittgerade.

Aufgabe 2:

Untersuche, ob sich die Ebenen E und F schneiden.

Gib gegebenenfalls die Schnittgerade an.

a) $E: 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$, $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $E: 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2$, $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3:

Bestimme die Zahlen a, b und c in der Parametergleichung von F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ a \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} b \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ c \end{pmatrix}$

so, dass die Ebenen F und $E: x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$ identisch sind.

Aufgabe 4:

Gib die Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen.

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ an.

Lösungen

Aufgabe 1:

Die Ebenen E und G sind parallel, da die Normalenvektoren der beiden Ebenen Vielfache

zueinander sind: $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_G = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Die Ebenen E und F schneiden sich in einer Schnittgerade:

$$\begin{array}{rcl} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8 & | \cdot 2 & \rightarrow \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 8 & \leftarrow & \end{array} \quad \begin{array}{rcl} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8 \\ 8x_2 = 24 & (*) & \end{array}$$

Lösung des Gleichungssystems:

Aus (*) folgt: $x_2 = 3$

Setze $x_3 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$

$$-x_1 + 2 \cdot 3 - 3t = 8 \Rightarrow x_1 = -2 - 3t$$

$$\text{Gleichung der Schnittgerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 - 3t \\ 3 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Ebenen F und G schneiden sich in einer Schnittgerade:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 4 & \rightarrow & \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 8 & \leftarrow & \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 4 \\ 4x_1 + 12x_3 = 12 & (*) & \end{array}$$

Lösung des Gleichungssystems:

Setze $x_3 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$

$$\text{Aus (*) folgt: } 4x_1 + 12t = 12 \Rightarrow x_1 = 3 - 3t$$

$$2(3 - 3t) - 4x_2 + 6t = 4 \Rightarrow x_2 = 0,5$$

$$\text{Gleichung der Schnittgerade: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 - 3t \\ 0,5 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

- a) Einsetzen der Zeilen der Gleichung F in die Gleichung E:

$$3(1-s+t) + 2(1-s+2t) - (s+t) = 3$$

$$\Rightarrow 3 - 3s + 3t + 2 - 2s + 4t - s - t = 3 \Rightarrow -6s + 6t = -2 \Rightarrow t = -\frac{1}{3} + s$$

$$\text{Einsetzen in die Ebenengleichung von F: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{3} + s\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnittgerade g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- b) Einsetzen der Zeilen der Gleichung F in die Gleichung E:

$$2(-1+4s+t) - 2(1+s+t) + 3(3-2s) = -2$$

$$\Rightarrow -2 + 8s + 2t - 2 - 2s - 2t + 9 - 6s = -2 \Rightarrow 5 = -2$$

Da sich ein Widerspruch ergibt, sind die beiden Ebenen echt parallel.
Es gibt keine Schnittgerade.

Aufgabe 3:

Einsetzen der Zeilen der Ebene F in die Ebene E:

$$(3+sb) + 2(3+2s-2t) - (a+6s+tc) = 4$$

$$\Rightarrow 3 + sb + 6 + 4s - 4t - a - 6s - tc = 4$$

$$\Rightarrow 9 - a + s(b-2) + t(-4-c) = 4$$

Wenn die Ebenen identisch sind, muss eine wahre Aussage entstehen.

Dies ist der Fall für $9 - a = 4$ und $b - 2 = 0$ und $-4 - c = 0$.

Daraus folgt $a = 5$, $b = 2$ und $c = -4$

Aufgabe 4:

Gib die Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{an.}$$

Umwandlung der Ebene E in eine Koordinatengleichung:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Ansatz der Koordinatengleichung: E: $-9x_3 = d$

Einsetzen des Punktes A(2/-1/0): $0 = d$

Koordinatengleichung von E: $-9x_3 = 0$ bzw. einfacher: E: $x_3 = 0$

Einsetzen der Zeilen der Ebene F in die Koordinatengleichung von E:

$$2 + 2u = 0 \Rightarrow u = -1$$

$$\text{Einsetzen in die Ebenengleichung von F: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dies ergibt als Schnittgerade g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$