

Analytische Geometrie

Gegenseitige Lage von Ebenen und Geraden

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

April 2019

Aufgabe 1:

Bestimme den Schnittpunkt der Ebene E: $-x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$ und der Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2:

Prüfe rechnerisch, ob die Gerade g in der Ebene E liegt oder die Gerade parallel zur Ebene verläuft.

$$a) \text{ E: } -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 ; g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \text{ E: } -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 ; g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

Ein Baum mit dem Fußpunkt F(-2/1/0) und der Spitze S(-2/1/15) wird von der Sonne

bestrahlt, deren Sonnenstrahlen parallel zum Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ verlaufen.

Der Baum wirft einen Schatten auf einen Hang, der durch die Ebene E: $x_1 + 2x_2 + x_3 = -6$ repräsentiert wird. Wo liegt der Schattenpunkt T der Baumspitze S auf dem Hang und wie lang ist der Schatten des Baumes?

Aufgabe 4:

Untersuche die gegenseitige Lage von E und g.

$$a) \text{ E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$b) \text{ E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} ; g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$c) \text{ E: } \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 ; g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \text{ E: } \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 ; g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$e) \text{ E: } \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 ; g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Lösungen**Aufgabe 1:**

Einsetzen der Zeilen der Geradengleichung in die Ebenengleichung:

$$\begin{aligned} -(-1+2t) + 2(6-t) + (-6+3t) &= 5 \\ \Rightarrow 1-2t+12-2t-6+3t &= 5 \Rightarrow -t = -2 \Rightarrow t = 2 \end{aligned}$$

Einsetzen von $t = 2$ in die Geradengleichung ergibt den Schnittpunkt $S(3/4/0)$.

Aufgabe 2:

a) Einsetzen der Zeilen der Geradengleichung in die Ebenengleichung:

$$\begin{aligned} -2(5+2t) + (7+2t) + 2(3+t) &= 3 \\ \Rightarrow -10-4t+7+2t+6+2t &= 3 \Rightarrow 3=3 \text{ ist eine wahre Aussage} \end{aligned}$$

Die Gerade liegt in der Ebene E.

b) Einsetzen der Zeilen der Geradengleichung in die Ebenengleichung:

$$\begin{aligned} -2(1+t) + (0+4t) + 2(2-t) &= 3 \\ \Rightarrow -2-2t+4t+4-2t &= 3 \Rightarrow 2=3 \text{ ist eine falsche Aussage} \end{aligned}$$

Die Gerade ist parallel zu E.

Aufgabe 3:

Der Schattenpunkt T entspricht dem Schnitt der Ebene E mit der Geraden, die durch S verläuft und den Richtungsvektor der Sonnenstrahlen besitzt.

$$\text{Geradengleichung: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Einsetzen der Zeilen der Geradengleichung in die Ebenengleichung:

$$\begin{aligned} -2+4r+2(1+5r) + (15+7r) &= -6 \\ \Rightarrow -2+4r+2+10r+15+7r &= -6 \Rightarrow 21r = -21 \Rightarrow r = -1 \end{aligned}$$

Einsetzen von $r = -1$ in die Geradengleichung ergibt den Schnittpunkt $T(-6/-4/8)$.

$$\text{Schattenlänge des Baumes: } |\overrightarrow{FT}| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16+25+64} = \sqrt{105} \text{ LE}$$

Aufgabe 4:

a) Gleichsetzen der beiden Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung des Gleichungssystems (mit GTR): $t = -0,5$; $r = 0$; $s = 1,5$ Einsetzen von $t = -0,5$ in die Geradengleichung ergibt den Schnittpunkt $S(5,5/-1/0,5)$.

b) Gleichsetzen der beiden Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem besitzt keine Lösung (GTR).

Die Gerade ist parallel zur Ebene.

c) Umwandlung der Ebenengleichung in eine Koordinatengleichung:

Ansatz: $3x_1 - x_2 + x_3 = d$ Einsetzen des Ebenenpunktes $P(2/2/1)$: $3 \cdot 2 - 2 + 1 = d \Rightarrow d = 5$ Koordinatengleichung: $3x_1 - x_2 + x_3 = 5$

Einsetzen der Zeilen der Geradengleichung in die Ebenengleichung:

$$3(1+2t) - (-2t) + (2+t) = 5$$

$$\Rightarrow 3 + 6t + 4t + 2 + t = 5 \Rightarrow 11t = 0 \Rightarrow t = 0$$

Einsetzen von $t = 0$ in die Geradengleichung ergibt den Schnittpunkt $S(1/0/2)$.

d) Umwandlung der Ebenengleichung in eine Koordinatengleichung:

Ansatz: $-2x_1 + x_2 + 2x_3 = d$ Einsetzen des Ebenenpunktes $P(2/4/3)$: $-2 \cdot 2 + 4 + 2 \cdot 3 = d \Rightarrow d = 6$ Koordinatengleichung: $-2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$

Einsetzen der Zeilen der Geradengleichung in die Ebenengleichung:

$$-2(5+2t) + (6+6t) + 2(5-t) = 6$$

$$\Rightarrow -10 - 4t + 6 + 6t + 10 - 2t = 6 \Rightarrow 6 = 6 \text{ wahre Aussage}$$

Die Gerade liegt in der Ebene.

e) Umwandlung der Ebenengleichung in eine Koordinatengleichung:

Ansatz: $-3x_1 + x_2 = d$

Einsetzen des Ebenenpunktes $P(-2/4/-1)$: $-3 \cdot (-2) + 4 = d \Rightarrow d = 10$

Koordinatengleichung: $-3x_1 + x_2 = 10$

Einsetzen der Zeilen der Geradengleichung in die Ebenengleichung:

$$-3(1 + 2t) + 6t = 10$$

$$\Rightarrow -3 - 6t + 6t = 10 \Rightarrow -3 = 10 \text{ falsche Aussage}$$

Die Gerade ist parallel zur Ebene.