Analytische Geometrie

Geraden im Raum

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

April 2019

Aufgabe 1:

a) Der Punkt R(-1/b/c) liegt auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimme b und c.

b) Bestimme a und b so, dass der Punkt R(4/5/b) auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$ liegt.

Aufgabe 2:

Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(2/3/0), B(-1/0/3) und C(0/1/4).
Bestimme die Gleichungen der drei Geraden, die auf der Seite $\overline{AB}$ bzw. auf der Seite $\overline{BC}$ bzw. auf der Seite $\overline{AC}$ liegen.

Aufgabe 3:

Untersuche, wie jeweils zwei der drei Geraden g, h und k zueinander liegen.
Sofern sie sich schneiden, gib den Schnittpunkt an.

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4:

a) Gib Werte für a, b, c, d an, so dass die Geraden g und h parallel, aber nicht identisch sind.

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ b \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ c \\ d \end{pmatrix}$

b) Gib Werte für a, b, c, d an, so dass die Geraden g und h windschief sind.

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

Aufgabe 5:

Gib die Schnittpunkte der Geraden g mit den Koordinatenebenen an
(Spurpunkte der Geraden).

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösungen

Aufgabe 1:

a) Punktprobe von R: $\begin{pmatrix} -1 \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aus der 1.Zeile folgt: $-1 = 2 + 2r \Rightarrow r = -1{,}5$
Aus der 2.Zeile folgt: $b = 1 - 4{,}5 = -3{,}5$
Aus der 3.Zeile folgt: $c = 0 + 1{,}5 = 1{,}5$

b) Punktprobe von R: $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$

Aus der 1.Zeile folgt: $4 = 3 + r \Rightarrow r = 1$
Aus der 2.Zeile folgt: $5 = 1 + a \Rightarrow a = 4$
Aus der 3.Zeile folgt: $b = -1 + 2 = 1$

Aufgabe 2:

Gerade auf $\overline{AB}$: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ Gerade auf $\overline{AC}$: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gerade auf $\overline{BC}$: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3:

Lage der Geraden g und k:

Die Richtungsvektoren der beiden Geraden sind Vielfache: $-2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Die Geraden sind daher entweder identisch oder echt parallel.

Kontrolle, ob der Punkt P(1/2/0), der auf g liegt, auch auf k liegt: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$

Aus der 1.Zeile folgt r = -1,5 und aus der 2.Zeile $r = \frac{1}{6}$.
Damit liegt P nicht auf der Geraden k. Die Geraden g und k sind echt parallel.

Lage der Geraden g und h:

Die Richtungsvektoren der beiden Geraden sind keine Vielfache.
Daher schneiden sich g und h oder sie sind windschief zueinander.

Prüfung durch Gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\\-6\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\quad\begin{array}{rrcrr}1&-r&=&3&+3s\\ \Rightarrow 2&+3r&=&-4&+s\\0&+3r&=&-6&+2s\end{array}$$

Aus der 1.Zeile folgt: $r=-2-3s$ (*)
Einsetzen in 2.Zeile: $2+3(-2-3s)=-4+s\Rightarrow -4-9s=-4+s\Rightarrow s=0$
Aus (*) folgt dann r = -2
Prüfung mit Zeile 3: $0+3\cdot(-2)=-6+0$ ist eine wahre Aussage
Die Geraden g und h schneiden sich.
Einsetzen von s = 0 in die Gerade h ergibt den Schnittpunkt S(3/-4/-6).

Lage der Geraden h und k:

Die Richtungsvektoren der beiden Geraden sind keine Vielfache.
Daher schneiden sich h und k oder sie sind windschief zueinander.

Prüfung durch Gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\\-6\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\quad\begin{array}{rrcrr}4&+2r&=&3&+3s\\ \Rightarrow 3&-6r&=&-4&+s\\6&-6r&=&-6&+2s\end{array}$$

Aus der 1.Zeile folgt: $r=-0,5+1,5s$ (*)
Einsetzen in 2.Zeile: $3-6(-0,5+1,5s)=-4+s\Rightarrow 6-9s=-4+s\Rightarrow s=1$
Aus (*) folgt dann r = 1
Prüfung mit Zeile 3: $6-6\cdot 1=-6+2$ ist eine falsche Aussage
Die Geraden h und k sind windschief zueinander.

Aufgabe 4:

a) g und h sind parallel, wenn die Richtungsvektoren Vielfache zueinander sind:

$k\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\c\\d\end{pmatrix}$ Aus Zeile 1: k = 2; aus Zeile 2: c = 6 ; aus Zeile 3: d = 8.

a und b müssen so gewählt werden, dass der Punkt P(2/a/b) nicht auf der Geraden h liegt. Für die Wahl von a und b gibt es viele Lösungsmöglichkeiten:

$$\begin{pmatrix}2\\a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\c\\d\end{pmatrix}$$

Aus Zeile 1 folgt s = 1.
Damit der Punkt nicht auf der Geraden h liegt muss aus Zeile 2 folgen: $a \neq 1+1\cdot 6$.
Damit der Punkt nicht auf der Geraden h liegt, muss aus Zeile 3 folgen: $b \neq -2+1\cdot 8$
Es dürfen für a und b alle Zahlenwerte gewählt werden, nur nicht a = 7 und b = 6.

b) Der Richtungsvektor der Geraden h darf kein Vielfaches vom Richtungsvektor von g sein.
Es gibt unendlich viele Möglichkeiten für die Werte von b, c und d.
Beispielsweise wäre möglich b = 1, c = 0 und d = 0.

Der Wert a muss so gewählt werden, dass beim Gleichsetzen der Geraden keine Lösung existiert.

$$\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Aus der 3.Zeile folgt, dass a nicht 2 sein darf. Ansonsten sind alle Zahlenwerte für a möglich.

Aufgabe 5:

a) Schnittpunkt mit der $x_1 - x_2$ -Ebene: $x_3 = 0$
$1+r=0 \Rightarrow r=-1$

r = -1 in g eingesetzt ergibt $S_{12}(2 / -1 / 0)$

Schnittpunkt mit der $x_1 - x_3$ -Ebene: $x_2 = 0$
$1+2r=0 \Rightarrow r=-0{,}5$

r = -0,5 in g eingesetzt ergibt $S_{13}(1{,}5 / 0 / 0{,}5)$

Schnittpunkt mit der $x_2 - x_3$ -Ebene: $x_1 = 0$
$1-r=0 \Rightarrow r=1$

r = 1 in g eingesetzt ergibt $S_{23}(0 / 3 / 2)$

b) Schnittpunkt mit der $x_1 - x_2$ -Ebene: $x_3 = 0$
$5=0$ ist eine falsche Aussage

Das heißt, es gibt den Schnittpunkt nicht (die Gerade ist parallel zur $x_1 - x_2$ -Ebene)

Schnittpunkt mit der $x_1 - x_3$ -Ebene: $x_2 = 0$
$3+s=0 \Rightarrow s=-3$

s = -3 in g eingesetzt ergibt $S_{13}(-5 / 0 / 5)$

Schnittpunkt mit der $x_2 - x_3$ -Ebene: $x_1 = 0$
$-2+s=0 \Rightarrow s=2$
s = 2 in g eingesetzt ergibt $S_{23}(0 / 5 / 5)$