

Analytische Geometrie

Ebenengleichung (Normalengleichung, Koordinatengleichung)

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

März 2019

Aufgabe 1:

- a) Der Punkt $P(3/1/-2)$ liegt in der Ebene E , $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von E .

Bestimme eine Normalengleichung von E .

- b) Überprüfe, ob die Punkte $P(2/2/2)$ bzw. $Q(0/5/-1)$ in E liegen.

Aufgabe 2:

Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ steht orthogonal auf der Ebene E , in der auch der Punkt $P(1/4/0)$ liegt.

- a) Stelle eine Koordinatengleichung von E auf.
b) Bestimme, falls möglich, die Zahlen a, b, c so, dass die Punkte $P(a/3/2)$, $Q(b/b/2)$, $R(c/c/c)$ in der Ebene E liegen.

Aufgabe 3:

Die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ verläuft orthogonal zur Ebene E , der Punkt $P(2/3/3)$ liegt in E .

Bestimme eine Normalengleichung von E .

Aufgabe 4:

Ein Tischfuß zeigt von einem Punkt $F(4/5/0)$ des Fußbodens aus nach oben, die Tischplatte ist 8 Einheiten vom Boden entfernt. Bestimme eine Normalengleichung der Ebene, in der die Tischplatte liegt.

Aufgabe 5:

Bestimme eine Koordinatengleichung der x_1x_2 -Ebene.

Aufgabe 6:

- a) Wandle die Ebene $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$ in eine Koordinatengleichung um.

- b) Wandle die Ebene $E: 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 8$ in eine Normalengleichung um.

Aufgabe 7:

Die beiden Punkte $P(3/2/1)$ und $Q(7/-4/11)$ liegen spiegelbildlich zur Ebene E . Stellen eine Normalengleichung von E auf und wandle diese in eine Koordinatengleichung um.

Lösungen**Aufgabe 1:**

a) Normalengleichung von E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0.$

b) Einsetzen von P(2/2/2) in E: $\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -1 + 0 + 12 \neq 0$

P liegt nicht auf E.

Einsetzen von Q(0/5/-1) in E: $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -3 + 0 + 3 = 0$

Q liegt auf E.

Aufgabe 2:

a) Ansatz für die Koordinatengleichung: $2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = d$

Einsetzen von P(1/4/0): $2 \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 5 \cdot 0 = d \Rightarrow -6 = d$

Koordinatengleichung: $2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -6$

b) Einsetzen von P(a/3/2): $2a - 6 + 10 = -6 \Rightarrow a = -5$

Einsetzen von Q(b/b/2): $2b - 2b + 10 = -6 \Rightarrow 10 = -6$

Es gibt keinen Wert von b, für den Q auf der Ebene E liegt.

Einsetzen von R(c/c/c): $2c - 2c + 5c = -6 \Rightarrow c = -1,2$

Aufgabe 3:

Der Richtungsvektor von g entspricht dem Normalenvektor von E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

Aufgabe 4:

Ein Punkt der Tischplatte hat die Koordinaten A(4/5/8).

Da die Ebene parallel zur $x_1 - x_2$ -Ebene ist, besitzt die Ebene den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Ebene der Tischplatte: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$

Aufgabe 5:

Die x_1x_2 -Ebene besitzt die Koordinatengleichung $x_3 = 0$

Aufgabe 6:

- a) Ansatz für die Koordinatengleichung: $-3x_1 + x_2 + 5x_3 = d$
 Einsetzen des Punktes $P(0/2/2)$: $-3 \cdot 0 + 2 + 10 = d \Rightarrow 12 = d$
 Koordinatengleichung: $-3x_1 + x_2 + 5x_3 = 12$

- b) Ein Punkt auf der Ebene ist $A(4/0/0)$.

$$\text{Normalengleichung: } \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

Aufgabe 7:

Ein Normalenvektor von E lautet $\vec{n} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Ein Punkt auf E ist der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{PQ}$: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3+7 \\ 2-4 \\ 1+11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\text{Normalengleichung von E: } \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} = 0$$

Ansatz für die Koordinatengleichung: $4x_1 - 6x_2 + 10x_3 = d$

Einsetzen des Punktes $M(5/-1/6)$: $20 + 6 + 60 = d \Rightarrow d = 86$

Koordinatengleichung: $4x_1 - 6x_2 + 10x_3 = 86$