

Analytische Geometrie

Betrag von Vektoren

Allg. Gymnasien: Ab Klasse 10
Berufliche Gymnasien: Ab Klasse 12

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juli 2018

Aufgabe 1:

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Bestimme den Vektor $\vec{b}$, für den gilt: Ein zu $\vec{b}$ gehörender Pfeil ist parallel zu einem zu $\vec{a}$ gehörenden Pfeil und gleich gerichtet, und es gilt: $|\vec{b}| = 3$.

Aufgabe 2:

- Berechne den Abstand der Punkte $A(3/-2/5)$ und $B(2/2/3)$.
- Berechne den Abstand der Punkte $A(\sqrt{2} / 1 / -0,4)$ und $B(0/0,5/0,1)$.
- Berechne den Wert von a so, dass die Punkte $A(1/a/3)$ und $B(2/4/-1)$ den Abstand $d = \sqrt{17}$ haben.
- Berechne den Wert von x so, dass die Punkte $A(x/x/2)$ und $B(1/x/5)$ den Abstand $d = 5$ haben.

Aufgabe 3:

Gegeben ist das Viereck ABCD mit $A(2/0/2)$, $B(1/1/1)$, $C(0/2/2)$ und $D(1/1/3)$.

- Untersuche, ob es sich bei dem Viereck ABCD um eine Raute handelt.
- Berechne die Länge der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$.

Aufgabe 4:

Untersuche, ob das Dreieck ABC mit $A(7/0/-1)$, $B(5/-3/-1)$ und $C(4/0/1)$ gleichschenkelig oder sogar gleichseitig ist.

Aufgabe 5:

Für jede reelle Zahl r ist ein Punkt $P(5/0/r)$ gegeben. Für welche Werte von r hat der Punkt P vom Punkt $A(4/-2/5)$ die Entfernung 3?

Lösungen

Aufgabe 1:

Es gilt $|\vec{a}| = \sqrt{36 + 4 + 9} = 7$.

Der zugehörige Einheitsvektor lautet $\vec{a}_0 = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Es gilt: $\vec{b} = 3 \cdot \vec{a}_0 = \frac{3}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2:

$$\text{a) } |\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}$$

$$\text{b) } |\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-0,5)^2 + 0,5^2} = \sqrt{2,5}$$

$$\text{c) } |\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 4-a \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{17} \Rightarrow \sqrt{1+(4-a)^2+16} = \sqrt{17} \Rightarrow (4-a)^2 = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$\text{d) } |\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 1-x \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = 5 \Rightarrow \sqrt{(1-x)^2+9} = 5 \quad (1-x)^2+9=25 \Rightarrow (1-x)^2=16$$

1.Lösung: $1-x=4 \Rightarrow x=-3$

2.Lösung: $1-x=-4 \Rightarrow x=5$

Aufgabe 3:

$$\text{a) Es gilt } \overline{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \overline{DC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Da diese beiden Vektoren gleich sind, handelt es sich bei dem Viereck um ein Parallelogramm.

Nun wird geprüft, ob die benachbarten Seiten gleich lang sind:

$$|\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3} \quad \text{und} \quad |\overline{AD}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3}$$

Damit handelt es sich bei dem Viereck um eine Raute.

$$\text{b) } |\overrightarrow{AC}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{8} \text{ und } |\overrightarrow{BD}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 2$$

Aufgabe 4:

Um zu prüfen, ob das Dreieck gleichschenkelig oder gleichseitig ist, müssen die Längen der Dreiecksseiten berechnet werden:

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+9+0} = \sqrt{13}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9+0+4} = \sqrt{13}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$$

Da nur zwei der drei Seiten gleich lang sind, ist das Dreieck gleichschenkelig, aber nicht gleichseitig.

Aufgabe 5:

$$\text{Bedingung: } |\overrightarrow{AP}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ r-5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+4+(r-5)^2} = 3 \quad | \text{ quadrieren}$$

$$\Rightarrow 1+4+(r-5)^2 = 9$$

$$(r-5)^2 = 4 \quad | \sqrt{}$$

$$r-5 = \pm 2$$

$$r = 7 \text{ oder } r = 3$$