

Analytische Geometrie

Abstand windschiefer Geraden

Berufliche Gymnasien: ab Klasse 11

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juli 2018

Aufgabe 1:

Berechne den Abstand der windschiefer Geraden g und h .

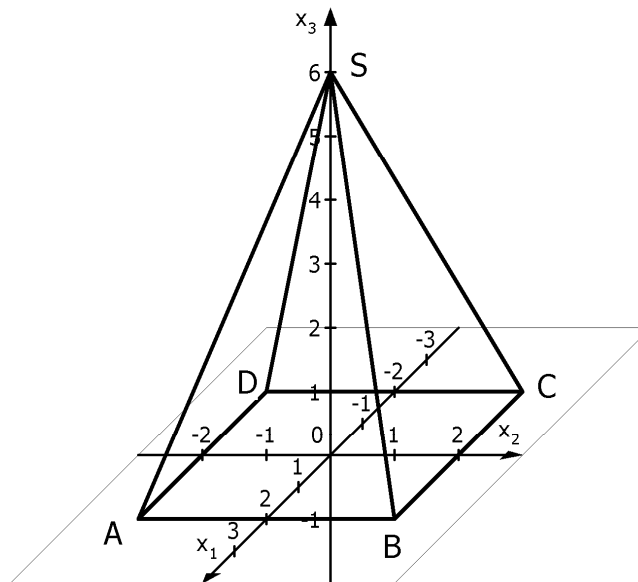
$$\text{a) } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} ; h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

Die Figur zeigt eine quadratische Pyramide mit der Grundseite 4 cm und der Höhe 6 cm.

Bestimme den Abstand der Grundflächenkante $\overline{AB}$ von der Seitenkante $\overline{CS}$.

**Aufgabe 3:**

Gegeben sind die windschiefer Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Gib die Koordinaten der Punkte G auf g und H auf h an, für die die Strecke $\overline{GH}$ die kürzeste Verbindung – also den Abstand der Geraden – darstellt.

Berechne außerdem den Abstand der Geraden.

Lösungen

Aufgabe 1:

a) Berechnung des Abstandes mit der Formel $d = |(\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{n}_0|$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{und damit } \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{36+9+36}} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} d &= |(\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{n}_0| = \left| \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{9} \cdot \left| \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{9} |-42 + 24 - 36| = 6 \end{aligned}$$

b) Berechnung des Abstandes mit der Formel $d = |(\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{n}_0|$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und damit } \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{4+25+9}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{38}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} d &= |(\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{n}_0| = \left| \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{38}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{38}} \cdot \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{38}} |12 + 5 + 21| = \sqrt{38} \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

Der Abstand der beiden Kanten entspricht dem Abstand der windschiefen Geraden durch A(2/-2/0) und B(2/2/0) bzw. durch C(-2/2/0) und S(0/0/6).

Geradengleichung durch A und B: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Geradengleichung durch C und S: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Berechnung des Abstandes mit der Formel $d = |(\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{n}_0|$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \text{und damit } \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{576 + 0 + 64}} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{640}} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$d = |(\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{n}_0| = \left| \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{640}} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{640}} \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{640}} |96 + 0 + 0| \approx 3,79$$

Aufgabe 3:

Um die beiden Punkte zu berechnen, werden zwei allgemeine Geradenpunkte von g und h aufgestellt:

allgemeiner Geradenpunkt auf g: $G(-1-s/2/-7+s)$

allgemeiner Geradenpunkt auf h: $H(2t/-6+2t/6-t)$

Bedingung: Der Vektor $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 1+2t+s \\ -8+2t \\ 13-t-s \end{pmatrix}$ muss orthogonal zu den Richtungsvektoren der

Geraden g und h stehen:

$$\begin{pmatrix} 1+2t+s \\ -8+2t \\ 13-t-s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -1-2t-s+13-t-s=0 \Rightarrow 12-3t-2s=0 \quad (*)$$

$$\begin{pmatrix} 1+2t+s \\ -8+2t \\ 13-t-s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2+4t+2s-16+4t-13+t+s=0 \Rightarrow -27+9t+3s=0 \quad (**)$$

Gesucht ist nun die Lösung des Gleichungssystems (*) und (**).

Aus (*) folgt $12-3t-2s=0 \Rightarrow s=6-1,5t$ eingesetzt in (**)

$$\begin{aligned} -27+9t+3(6-1,5t) &= 0 \\ \Rightarrow -27+9t+18-4,5t &= 0 \\ \Rightarrow 4,5t &= 9 \Rightarrow t=2 \end{aligned}$$

Daraus folgt $s=6-1,5 \cdot 2=3$

Einsetzen der Parameterwerte in die Punkte ergibt

$G(-4/2/-4)$ und $H(4/-2/4)$.

$$\text{Abstand der windschiefen Geraden} = |\overrightarrow{GH}| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{64+16+64} = 12$$