

Analytische Geometrie

Abstand Punkt Gerade

Allg. Gymnasien: ab J1 / Q1
Beruf. Gymnasien: ab Klasse 12

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2018

Aufgabe 1:

a) Bestimme den Abstand des Punktes $R(-4/9/-1)$ von der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b) Berechne den Abstand des Punktes $R(10/-4/-9)$ von der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}$.

c) Berechne den Abstand des Punktes $R(-8/-5/6)$ von der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2:

Bestimme den Abstand der parallelen Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3:

Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(-2/-4/-4)$, $B(2/9/3)$ und $C(-2/11/-1)$.
Bestimme den Inhalt der Fläche des Dreiecks.

Aufgabe 4:

Ein Flugzeug wird erst im Punkt $P(5/4/3)$ und später im Punkt $Q(2/8/3)$ gesichtet.
Im Punkt $R(8/100/1)$ befindet sich eine Radarstation mit einer Reichweite von 75km.
Wird das Flugzeug vom Radar erfasst, wenn es geradlinig weiterfliegt?
(alle Koordinaten in km)

Lösungen

Aufgabe 1:

- a) Im ersten Schritt muss der Lotfußpunkt F auf der Geraden g bestimmt werden.
Ein allgemeiner Punkt auf g hat die Koordinaten $F(1+3t/-1+4t/1-2t)$.

$$\text{Es ist } \overrightarrow{RF} = \begin{pmatrix} 5+3t \\ -10+4t \\ 2-2t \end{pmatrix}$$

$$\text{Der Lotfußpunkt ergibt sich mit der Bedingung } \overrightarrow{RF} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 5+3t \\ -10+4t \\ 2-2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 15+9t-40+16t-4+4t = 0 \Rightarrow 29t-29=0 \Rightarrow t=1$$

Der Lotfußpunkt hat die Koordinaten $F(4/3/-1)$.

$$\text{Der Abstand beträgt } |\overrightarrow{RF}| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{64+36} = 10$$

- b) Im ersten Schritt muss der Lotfußpunkt F auf der Geraden g bestimmt werden.
Ein allgemeiner Punkt auf g hat die Koordinaten $F(-7+12t/5-9t/-2+5t)$.

$$\text{Es ist } \overrightarrow{RF} = \begin{pmatrix} -17+12t \\ 9-9t \\ 7+5t \end{pmatrix}$$

$$\text{Der Lotfußpunkt ergibt sich mit der Bedingung } \overrightarrow{RF} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} -17+12t \\ 9-9t \\ 7+5t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} = -204+144t-81+81t+35+25t = 0 \Rightarrow 250t-250=0 \Rightarrow t=1$$

Der Lotfußpunkt hat die Koordinaten $F(5/-4/3)$.

$$\text{Der Abstand beträgt } |\overrightarrow{RF}| = \left| \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{25+144} = 13$$

- c) Im ersten Schritt muss der Lotfußpunkt F auf der Geraden g bestimmt werden.
Ein allgemeiner Punkt auf g hat die Koordinaten $F(7+2t/4/-9-6t)$.

$$\text{Es ist } \overrightarrow{RF} = \begin{pmatrix} 15+2t \\ 5+4t \\ -15-6t \end{pmatrix}$$

$$\text{Der Lotfußpunkt ergibt sich mit der Bedingung } \overrightarrow{RF} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} 15+2t \\ 5+4t \\ -15-6t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = 30 + 4t + 20 + 16t + 90 + 36t = 0 \Rightarrow 56t + 140 = 0 \Rightarrow t = -2,5$$

Der Lotfußpunkt hat die Koordinaten $F(2/-10/6)$.

$$\text{Der Abstand beträgt } |\overrightarrow{RF}| = \left| \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125}$$

Aufgabe 2:

Die Geraden g und h sind parallel, da ihre Richtungsvektoren Vielfache zueinander sind.

Wir wählen auf der Gerade h einen beliebigen Punkt $R(-1/5/-3)$.

Der Abstand der beiden Geraden entspricht dem Abstand des Punktes R von der Geraden g.

Im ersten Schritt muss der Lotfußpunkt F auf der Geraden g bestimmt werden.

Ein allgemeiner Punkt auf g hat die Koordinaten $F(-5+4t/3t/2+t)$.

$$\text{Es ist } \overrightarrow{RF} = \begin{pmatrix} -4+4t \\ -5+3t \\ 5+t \end{pmatrix}$$

$$\text{Der Lotfußpunkt ergibt sich mit der Bedingung } \overrightarrow{RF} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} -4+4t \\ -5+3t \\ 5+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -16 + 16t - 15 + 9t + 5 + t = 0 \Rightarrow 26t - 26 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Der Lotfußpunkt hat die Koordinaten $F(-1/3/3)$.

$$\text{Der Abstand beträgt } |\overrightarrow{RF}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$$

Aufgabe 3:

Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.

Die Grundseite g entspricht der Länge des Vektors $\overline{AB}$.

$$|\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16 + 169 + 49} = \sqrt{234}$$

Die Höhe h des Dreiecks entspricht dem Abstand des Punktes C(-2/11/-1) von der Geraden durch A und B.

Geradengleichung durch A und B: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$

Nun muss der Lotfußpunkt F auf der Geraden bestimmt werden.

Ein allgemeiner Punkt auf der Gerade hat die Koordinaten F(-2+4t/-4+13t/-4+7t).

Es ist $\overline{CF} = \begin{pmatrix} 4t \\ -15 + 13t \\ -3 + 7t \end{pmatrix}$

Der Lotfußpunkt ergibt sich mit der Bedingung $\overline{CF} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$.

$$\begin{pmatrix} 4t \\ -15 + 13t \\ -3 + 7t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix} = 16t - 195 + 169t - 21 + 49t = 0 \Rightarrow 234t - 216 = 0 \Rightarrow t = \frac{12}{13}$$

Der Lotfußpunkt hat die Koordinaten $F(\frac{22}{13} / 8 / \frac{32}{13})$

Der Abstand beträgt $|\overline{CF}| = \left| \begin{pmatrix} 48/13 \\ -3 \\ 45/13 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{450}{13}}$

Fläche des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{234} \cdot \sqrt{\frac{450}{13}} = 45$

Aufgabe 4:

Aufstellen einer Gerade durch P und Q (Flugbahn des Flugzeugs):

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zu berechnen ist der Abstand des Punktes R(8/100/1) von der Geraden g.

Im ersten Schritt muss der Lotfußpunkt F auf der Geraden g bestimmt werden.
Ein allgemeiner Punkt auf g hat die Koordinaten F(5-3t/4+4t/3).

$$\text{Es ist } \overrightarrow{RF} = \begin{pmatrix} -3-3t \\ -96+4t \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Lotfußpunkt ergibt sich mit der Bedingung $\overrightarrow{RF} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$.

$$\begin{pmatrix} -3-3t \\ -96+4t \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 9+9t-384+16t=0 \Rightarrow 25t-375=0 \Rightarrow t=15$$

Der Lotfußpunkt hat die Koordinaten F(-40/64/3).

$$\text{Der Abstand beträgt } |\overrightarrow{RF}| = \left| \begin{pmatrix} -48 \\ -36 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3604} \approx 60 < 75 \text{ km}$$

Das Flugzeug wird vom Radar erfasst.