

Analytische Geometrie

Abstand Punkt Ebene

Allg. Gymnasien: Ab J1 / Q1
Berufliche Gymnasien: Ab Klasse 12

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2018

Aufgabe 1:

Bestimme den Abstand des Punktes $R(4/0/7)$ von der Ebene $E: 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 1$ mit Hilfe einer Lotgeraden.

Aufgabe 2:

Wandle die folgenden Gleichungen in eine Hesse'sche Normalenform um:

$$\text{a) } E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{b) } E: x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \quad \text{c) } E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

Eine Ebene E hat den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und geht durch den Punkt $P(6/4/-1)$.

Berechne den Abstand des Ursprungs von der Ebene.

Aufgabe 4:

Gib den Abstand des Punktes $P(-3/4/2)$ von den einzelnen Koordinatenebenen an.

Aufgabe 5:

$$\text{a) Berechne den Abstand des Punktes } A(7/4/9) \text{ von der Ebene } E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\text{b) Berechne den Abstand des Punktes } P(2/-3/5) \text{ von der Ebene } E: 4x_1 - 3x_3 = 10.$$

Aufgabe 6:

$$\text{Weise nach, dass die Gerade } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ parallel zur Ebene } E: 4x_1 + 0,5x_2 - 2x_3 = 2$$

ist. Berechne den Abstand der Gerade g von der Ebene E .

Aufgabe 7:

Bestimme den Abstand der parallelen Ebenen $E: 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$ und

$$F: 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 10.$$

Aufgabe 8:

Bestimme die beiden Ebenen F und G , die von der Ebene $E: 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 12$ den Abstand $d = 6$ LE haben.

Aufgabe 9:

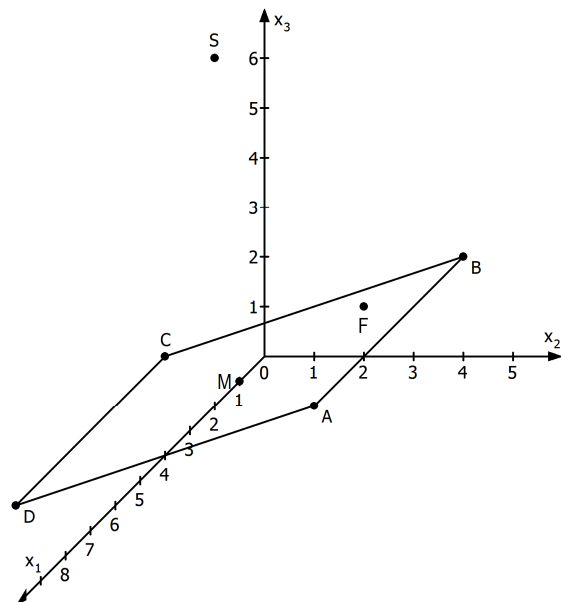
Welche Punkte der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ haben von der Ebene

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = 0 \text{ den Abstand } d = 5?$$

Aufgabe 10:

Gegeben sind die Punkte $A(4/3/1)$, $B(4/6/4)$, $C(12/4/6)$ und $D(12/1/3)$.

- Weise nach, dass die 4 Punkte ein Rechteck bilden.
- Zeige, dass das Rechteck in der Ebene $E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 8$ liegt.
- Vom Punkt $S(4/1/8)$ aus wird das Lot auf die Ebene E gefällt. Berechne die Koordinaten des Fußpunktes F .
- Berechne das Volumen der Pyramide $ABCD S$.
- Zeige, dass der Fußpunkt nicht mit dem Mittelpunkt des Rechtecks übereinstimmt, die Pyramide also nicht gerade ist.
- Es gibt zwei gerade Pyramiden $ABCD T_1$ und $ABCD T_2$, die dasselbe Volumen wie $ABCD S$ haben. Berechne die Koordinaten der Spitzen T_1 und T_2 .



Lösungen

Aufgabe 1:

Die Lotgerade g steht senkrecht auf E und geht durch den Punkt R.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Schnittpunkt von E mit g: } 2(4 + 2s) + 3(0 + 3s) + 6(7 + 6s) &= 1 \\ 8 + 4s + 9s + 42 + 36s &= 1 \Rightarrow 49s = -49 \Rightarrow s = -1 \end{aligned}$$

Einsetzen von $s = -1$ in die Geradengleichung ergibt Lotfußpunkt $F(2/-3/1)$.

$$\text{Abstand von R zu E: } |\overline{FR}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$$

Aufgabe 2:

a) Ansatz Koordinatengleichung von E: $2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = d$

$$\text{Einsetzen von } P(2/3/6) \text{ in E: } 2 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 9 \cdot 6 = d \Rightarrow d = 76$$

$$\text{Koordinatengleichung von E: } 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 76$$

$$\text{Hesse'sche Normalenform von E: } \frac{2x_1 + 6x_2 + 9x_3 - 76}{\sqrt{4 + 36 + 81}} = 0 \Rightarrow \frac{2x_1 + 6x_2 + 9x_3 - 76}{11} = 0$$

$$\text{b) Hesse'sche Normalenform von E: } \frac{x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 1}{\sqrt{1 + 9 + 4}} = 0 \Rightarrow \frac{x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 1}{\sqrt{14}} = 0$$

c) Umwandlung der Parametergleichung in eine Koordinatengleichung:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} \quad \text{bzw. vereinfacht } \vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ansatz Koordinatengleichung von E: } -3x_1 + x_2 - 2x_3 = d$$

$$\text{Einsetzen von } P(1/5/7) \text{ in E: } -3 + 5 - 14 = d \Rightarrow d = -12$$

$$\text{Koordinatengleichung von E: } -3x_1 + x_2 - 2x_3 = -12$$

$$\text{Hesse'sche Normalenform von E: } \frac{-3x_1 + x_2 - 2x_3 + 12}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = 0 \Rightarrow \frac{-3x_1 + x_2 - 2x_3 + 12}{\sqrt{14}} = 0$$

Aufgabe 3:

Ansatz für die Koordinatengleichung von E: $-0,5x_1 + x_2 - x_3 = d$

Einsetzen von P(6/4/-1): $-0,5 \cdot 6 + 4 - (-1) = d \Rightarrow d = 2$

Koordinatengleichung von E: $-0,5x_1 + x_2 - x_3 = 2$

Hesse'sche Normalenform von E: $\frac{-0,5x_1 + x_2 - x_3 - 2}{\sqrt{0,25 + 1 + 1}} = 0 \Rightarrow \frac{-0,5x_1 + x_2 - x_3 - 2}{1,5} = 0$

Abstand von O(0/0/0) zu E: $d = \left| \frac{-0,5 \cdot 0 + 0 - 0 - 2}{1,5} \right| = \frac{4}{3}$

Aufgabe 4:

Der Abstand von P zu den Koordinatenebenen kann man direkt an den Koordinaten von P ablesen:

Abstand von der x_1x_2 -Ebene (ablesbar am x_3 -Wert von P) = 2

Abstand von der x_1x_3 -Ebene (ablesbar am x_2 -Wert von P) = 4

Abstand von der x_2x_3 -Ebene (ablesbar am x_1 -Wert von P) = 3

Aufgabe 5:

a) Ansatz für die Koordinatengleichung von E: $8x_1 + 4x_2 + 8x_3 = d$

Einsetzen von P(1/0/-1): $8 + 0 - 8 = d \Rightarrow d = 0$

Koordinatengleichung von E: $8x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 0$

Hesse'sche Normalenform von E: $\frac{8x_1 + 4x_2 + 8x_3}{\sqrt{64 + 16 + 64}} = 0 \Rightarrow \frac{8x_1 + 4x_2 + 8x_3}{12} = 0$

Abstand von A(7/4/9) zu E: $d = \left| \frac{56 + 16 + 72}{12} \right| = 12$

b) Hesse'sche Normalenform von E: $\frac{4x_1 - 3x_3 - 10}{\sqrt{16 + 9}} = 0 \Rightarrow \frac{4x_1 - 3x_3 - 10}{5} = 0$

Abstand von P(2/-3/5) zu E: $d = \left| \frac{8 - 15 - 10}{5} \right| = \frac{17}{5}$

Aufgabe 6:

Berechnung des Schnittpunktes von g und E: $4(10 + r) + 0,5(-3 + 4r) - 2(-2 + 3r) = 2$
 $\Rightarrow 40 + 4r - 1,5 + 2r + 4 - 6r = 2 \Rightarrow 42,5 = 2$

Aufgrund des entstehenden Widerspruchs existiert kein Schnittpunkt.
 Daher ist g zu E parallel.

Zur Berechnung des Abstandes wird ein Punkt A(10/-3/-2) von g ausgewählt und der Abstand von A zur Ebene E berechnet.

$$\text{Hesse'sche Normalenform von E: } \frac{4x_1 + 0,5x_2 - 2x_3 - 2}{\sqrt{16 + 0,25 + 4}} = 0 \Rightarrow \frac{4x_1 + 0,5x_2 - 2x_3 - 2}{4,5} = 0$$

$$\text{Abstand von A(10/-3/-2) zu E: } d = \left| \frac{40 - 1,5 + 4 - 2}{4,5} \right| = 9$$

Die Gerade g hat von der Ebene E den Abstand 9.

Aufgabe 7:

Die Ebenen sind parallel, da die Normalenvektoren der Ebenen E und F Vielfache zueinander sind.

Wir wählen einen beliebigen Punkt der Ebene F, z.B. A(0/0/5).

Der Abstand der beiden parallelen Ebenen entspricht dem Abstand des Punktes A von der Ebene E.

$$\text{Hesse'sche Normalenform von E: } \frac{2x_1 - 2x_2 + x_3 + 1}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 0 \Rightarrow \frac{2x_1 - 2x_2 + x_3 + 1}{3} = 0$$

$$\text{Abstand von A(0/0/5) zu E: } d = \left| \frac{0 - 0 + 5 + 1}{3} \right| = 2$$

Der Abstand der beiden Ebenen beträgt 2.

Aufgabe 8:

$$\text{Hesse'sche Normalenform von E: } \frac{6x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 12}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = 0 \Rightarrow \frac{6x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 12}{7} = 0$$

$$\text{Gleichung der Ebene F: } \frac{6x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 12}{7} = 6 \Rightarrow 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 54$$

$$\text{Gleichung der Ebene G: } \frac{6x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 12}{7} = -6 \Rightarrow 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -30$$

Aufgabe 9:

Ein allgemeiner Punkt der Geraden g hat die Koordinaten $P(-1 + 3r / 2 + r / r)$.

Gesucht sind die Werte von r, so dass gilt: $d(P, E) = 5$

Ansatz für Koordinatengleichung von E: $4x_1 - 4x_2 + 7x_3 = d$

Einsetzen des Ebenenpunktes A(1/2/1): $4 - 8 + 7 = d \Rightarrow d = 3$

Koordinatengleichung von E: $4x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 3$

Hesse'sche Normalenform von E: $\frac{4x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 3}{9} = 0$

$$d(P, E) = \left| \frac{4(-1 + 3r) - 4(2 + r) + 7r - 3}{9} \right| = 5$$

$$\Rightarrow \left| \frac{15r - 15}{9} \right| = 5$$

$$1.\text{Fall: } \frac{15r - 15}{9} = 5 \Rightarrow 15r - 15 = 45 \Rightarrow r = 4 \quad \text{also } P(11/6/4)$$

$$2.\text{Fall: } \frac{15r - 15}{9} = -5 \Rightarrow 15r - 15 = -45 \Rightarrow r = -2 \quad \text{also } P(-7/0/-2)$$

Aufgabe 10:

- a) Zunächst wird gezeigt, dass es sich bei dem Viereck ABCD um ein Parallelogramm handelt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Da $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ist, handelt es sich um ein Parallelogramm.

Nun wird gezeigt, dass das Viereck einen rechten Winkel besitzt:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 - 6 + 6 = 0$$

Somit existiert im Punkt A einen rechten Winkel.
Damit ist das Viereck ABCD ein Rechteck.

- b) Einsetzen der 4 Punkte ABCD in die Ebenengleichung:

A(4/3/1) einsetzen: $4 + 6 - 2 = 8 \Rightarrow 8 = 8$ wahre Aussage

B(4/6/4) einsetzen: $4 + 12 - 8 = 8 \Rightarrow 8 = 8$ wahre Aussage

C(12/4/6) einsetzen: $12 + 8 - 12 = 8 \Rightarrow 8 = 8$ wahre Aussage

D(12/1/3) einsetzen: $12 + 2 - 6 = 8 \Rightarrow 8 = 8$ wahre Aussage

Die Punkte A,B,C,D und damit das Rechteck liegt in der Ebene E.

Rechteck in der Ebene E: $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 8$ liegt.

- c) Aufstellen einer Hilfsgerade h durch S orthogonal zu E.

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt der Ebene E mit der Geraden h ergibt F:

$$4 + s + 2(1 + 2s) - 2(8 - 2s) = 8$$

$$\Rightarrow 4 + s + 2 + 4s - 16 + 4s = 8$$

$$\Rightarrow 9s = 18 \Rightarrow s = 2$$

Einsetzen von $s = 2$ in die Gerade h ergibt $F(6/5/4)$.

- d) Volumenformel der Pyramide: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Rechteck}} \cdot \overline{SF}$$

$$\text{Es gilt } A_{\text{Rechteck}} = |\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}| = \sqrt{0+9+9} \cdot \sqrt{64+4+4} = \sqrt{18} \cdot \sqrt{72} = 36$$

$$\text{Es gilt } \overline{SF} = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+16+16} = 6$$

$$\text{Volumen der Pyramide: } V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 6 = 72$$

Gegeben sind die Punkte $A(4/3/1)$, $B(4/6/4)$, $C(12/4/6)$ und $D(12/1/3)$.

- e) Der Mittelpunkt des Rechtecks entspricht dem Mittelpunkt der Strecke $\overline{BD}$

$$\text{Koordinaten von M: } \overline{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{OB} + \overline{OD}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 3,5 \\ 3,5 \end{pmatrix}$$

also $M(8/3,5/3,5)$.

Damit stimmt M nicht mit F überein.

- f) Damit die Pyramiden volumengleich sind, müssen sie die gleiche Höhe haben wie die Pyramide ABCDS, also die Höhe $h = |\overline{FS}|$.

Damit die Pyramide gerade ist, muss diese Höhe im Punkt M „aufsetzen“.

Für die Spitzen der Pyramiden gilt:

$$\overline{OT_1} = \overline{OM} + \overline{FS} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -0,5 \\ 7,5 \end{pmatrix} \quad \text{also } T_1(6 / -0,5 / 7,5)$$

$$\overline{OT_2} = \overline{OM} - \overline{FS} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \quad \text{also } T_2(10 / 7,5 / -0,5)$$