

Hauptprüfung Abiturprüfung 2021

Baden-Württemberg

Teil 4: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

November 2021

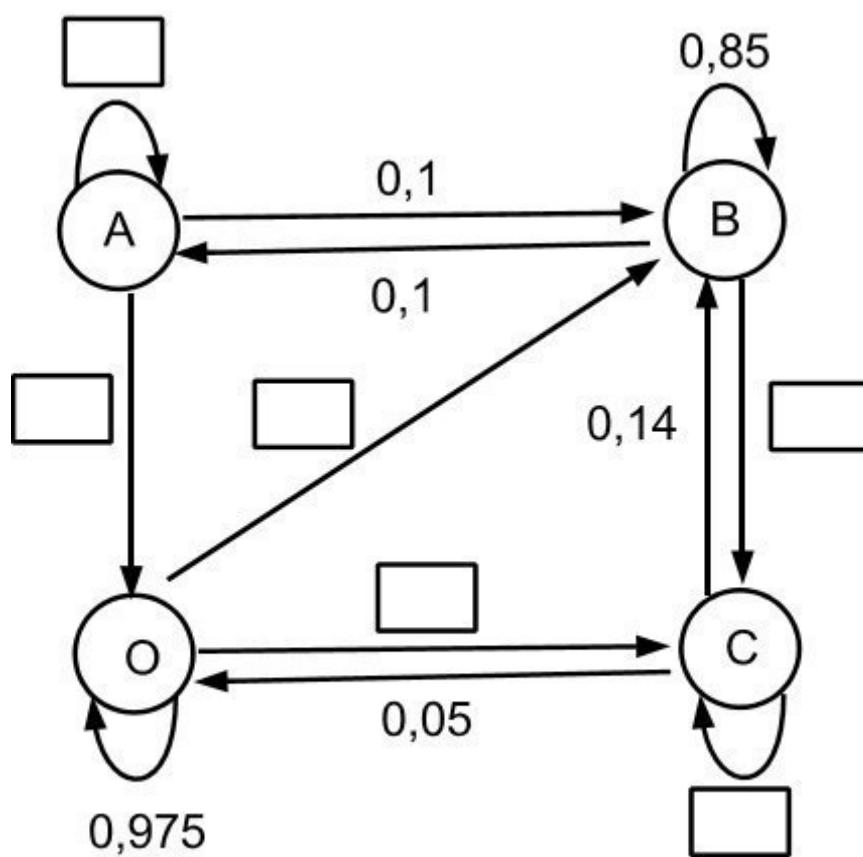
Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

- 2 Drei verschiedene Fitnessketten A, B und C konkurrieren in einer Region um die insgesamt 10.000 Kunden. Die Kunden sind entweder ohne Vertrag oder sie sind Mitglied bei genau einer Fitnesskette für ein Jahr angemeldet. Jedes Jahr melden sich einige Kunden ohne Vertrag neu an, manche Mitglieder wechseln die Fitnesskette, manche bleiben bei ihrer Fitnesskette, einige scheiden aus und sind dann ohne Vertrag. Die Entwicklung von einem Jahr zum nächsten lässt sich modellhaft durch die Gleichung $M \cdot \vec{v}_n = \vec{v}_{n+1}$ mit

$$M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,85 & 0,14 & 0,01 \\ 0 & 0,05 & 0,81 & 0,015 \\ 0,1 & 0 & 0,05 & 0,975 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_n = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ O \end{pmatrix}$$

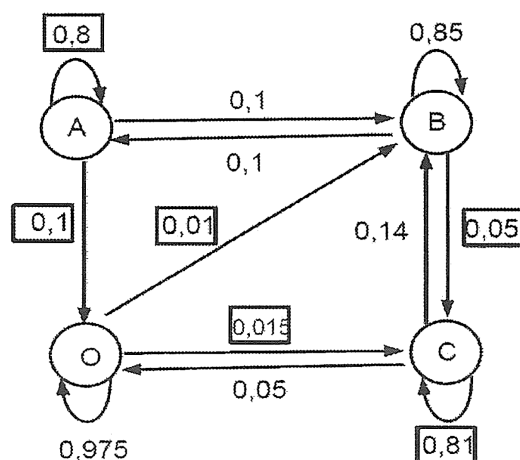
beschreiben. Hierbei wird die Anzahl der Mitglieder der Fitnessketten ebenfalls mit A, B und C bezeichnet. O ist die Anzahl der Kunden ohne Vertrag.

- 2.1 Vervollständigen Sie den Übergangsgraphen auf dem beiliegenden Arbeitsblatt. (3 Punkte)
- 2.2 Interpretieren Sie den Eintrag 0,14 im Sachzusammenhang. Nennen Sie die Fitnesskette, zu der ausschließlich Kunden kommen, die schon zuvor bei einer Kette angemeldet waren. (2 Punkte)
- 2.3 Im Jahr 2020 waren jeweils 1400 Mitglieder in den drei Ketten angemeldet. Bestimmen Sie die Anzahl der Mitglieder der drei Ketten im Jahr 2021. (3 Punkte)
- 2.4 Langfristig werden 10% der Kunden bei der Fitnesskette A angemeldet sein und 60% der Kunden ohne Vertrag bleiben. Ermitteln Sie die Verteilung aller Kunden, die von einem Jahr auf das nächste unverändert bleiben. (3 Punkte)
- 2.5 In einem Jahr hat die Fitnesskette A die doppelte Anzahl von Mitgliedern, wie jede der beiden anderen Ketten. Außerdem hat die Fitnesskette C dann ein Jahr später 950 Mitglieder. Ermitteln Sie die prozentuale Zunahme der Kunden ohne Vertrag. (4 Punkte)



Lösungen

2.1



Die Befüllung erfolgt anhand der Einträge in der Matrix M.

2.2 Interpretation des Wertes 0,14:

14% der Mitglieder der Fitnesskette C wechseln innerhalb eines Jahres in die Fitnesskette B.

Zur Fitnesskette A kommen ausschließlich Kunden, die zuvor schon bei einer Kette angemeldet waren. Dies ist daran erkennbar, dass von O aus kein Pfeil zu A verläuft.

2.3 Anzahl der Mitglieder im Jahr 2021:

In den Ketten A, B, C sind im Jahr 2020 jeweils 1400 Mitglieder.
Ohne Mitgliedschaft sind $10.000 - 3 \cdot 1400 = 5800$ Kunden.

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,85 & 0,14 & 0,01 \\ 0 & 0,05 & 0,81 & 0,015 \\ 0,1 & 0 & 0,05 & 0,975 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1400 \\ 1400 \\ 1400 \\ 5800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1260 \\ 1584 \\ 1291 \\ \dots \end{pmatrix}$$

Im Jahr 2021 sind in A 1260 Mitglieder, in B 1584 Mitglieder und in C 1291 Mitglieder.

2.4 Gegeben ist der Verteilungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ b \\ 0,3-b \\ 0,6 \end{pmatrix}$

Bedingung: $M \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,85 & 0,14 & 0,01 \\ 0 & 0,05 & 0,81 & 0,015 \\ 0,1 & 0 & 0,05 & 0,975 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,1 \\ b \\ 0,3-b \\ 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ b \\ 0,3-b \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

$$1.\text{Zeile: } 0,08 + 0,1 \cdot b = 0,1 \Leftrightarrow b = 0,2$$

Die anderen Zeilen liefern für $b = 0,2$ wahre Aussagen.

Für die 10.000 Kunden lautet die stabile Verteilung

$$\vec{v} = 10.000 \cdot \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,1 \\ 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1000 \\ 6000 \end{pmatrix}$$

2.5 Die Ausgangsverteilung lautet $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ x \\ 10.000 - 4x \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,85 & 0,14 & 0,01 \\ 0 & 0,05 & 0,81 & 0,015 \\ 0,1 & 0 & 0,05 & 0,975 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ x \\ 10.000 - 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 0,05x + 0,81x + 150 - 0,06x \\ 0,2x + 0,05x + 9750 - 3,9x \end{pmatrix}$$

$$\text{Es soll gelten: } 0,05x + 0,81x + 150 - 0,06x = 950 \Leftrightarrow x = 1000$$

$$\text{Anzahl Kunden ohne Vertrag vorher: } 10.000 - 4 \cdot 1000 = 6000$$

$$\text{Anzahl Kunden ohne Vertrag nachher: } 200 + 50 + 9750 - 3900 = 6100$$

Die Anzahl der Kunden ohne Vertrag hat um $\frac{100}{6000} \approx 0,017$, also um ca. 1,7% zugenommen.