

Hauptprüfung Abiturprüfung 2021

Baden-Württemberg

Teil 4: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2021

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

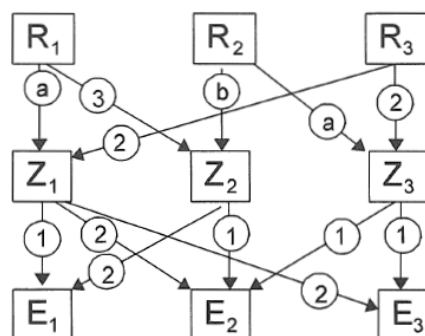
- 1 Ein Betrieb produziert in einem ersten Schritt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 . Daraus werden in einem zweiten Schritt die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 gefertigt.

Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) wird durch die nachfolgende Tabelle sowie das Verflechtungsdiagramm beschrieben.

Tabelle:

	E_1	E_2	E_3
R_1	7	5	2
R_2	6	4	1
R_3	2	6	6

Verflechtungsdiagramm:



- 1.1 Interpretieren Sie den Wert 5 in der Tabelle und berechnen Sie, wie viele ME der Rohstoffe benötigt werden, um jeweils 10 ME der Endprodukte zu produzieren. (3 Punkte)
- 1.2 Ermitteln Sie die Werte von a und b im Verflechtungsdiagramm. (4 Punkte)
- 1.3 Um einen reibungslosen Produktionsablauf zu gewährleisten, muss im Lager ein Mindestbestand an Rohstoffen von jeweils 50 ME vorhanden sein. Von R_1 sind noch 345 ME, von R_2 noch 285 ME und von R_3 noch 330 ME im Lager. Es sollen nun 25 ME von E_2 hergestellt werden. Ermitteln Sie die hergestellten Mengen von E_1 und E_3 , falls der Lagerbestand an Rohstoffen bis auf den Mindestbestand vollständig verarbeitet werden soll. (4 Punkte)
- 1.4 Ein Kunde erteilt einen Auftrag über 10 ME von E_1 und jeweils 20 ME von E_2 und E_3 . Die variablen Herstellungskosten in € pro ME der Endprodukte sind durch $\vec{k}_V = (30 \ 15 \ 45)$ gegeben. Die Fixkosten betragen 500 Euro. Berechnen Sie, wie hoch die Verkaufspreise der einzelnen Endprodukte sein müssen, damit der Gewinn 10% der Gesamtkosten beträgt und die Preise im selben Verhältnis wie die variablen Herstellungskosten stehen. (4 Punkte)

Lösungen

- 1.1 Der Wert 5 gibt an, dass für die Herstellung von 1 Mengeneinheit des Endprodukts E_2 5 Mengeneinheiten des Rohstoffes R_1 benötigt werden.

Rohstoff-Endprodukt-Matrix: $C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

Gegeben ist der Endproduktvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Berechnung des Rohstoffvektors: $\vec{r} = C \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 110 \\ 140 \end{pmatrix}$

Es werden 140 ME von R_1 , 110 ME von R_2 und 140 ME von R_3 benötigt.

- 1.2 Aus dem Verflechtungsdiagramm ergibt sich die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B:

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 & 0 \\ 0 & b & a \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bedingung: $A \cdot B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} 6+a & 2a+3 & 2a \\ 2b & b+a & a \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

Der Vergleich der Matrizen ergibt $a = 1$ und $b = 3$.

- 1.3 Gegeben ist der Rohstoffvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 345-50 \\ 285-50 \\ 330-50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 295 \\ 235 \\ 280 \end{pmatrix}$ und der

Produktionsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ 25 \\ y \end{pmatrix}$.

Bedingung: $\vec{r} = C \cdot \vec{p}$

$$\begin{pmatrix} 295 \\ 235 \\ 280 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 25 \\ y \end{pmatrix}$$

$$295 = 7x + 125 + 2y$$

Ausmultiplizieren: $235 = 6x + 100 + y$

$$280 = 2x + 150 + 6y$$

Aus der 2. Zeile folgt: $y = 135 - 6x$

Eingesetzt in die 1. Zeile: $295 = 7x + 125 + 2(135 - 6x) \Leftrightarrow -100 = -5x \Leftrightarrow x = 20$

Daraus folgt $y = 15$.

Die dritte Zeile bestätigt die Ergebnisse.

Es werden 20 ME von E_1 und 15 ME von E_3 hergestellt.

1.4 Gegeben: variabler Kostenvektor $\vec{k}_V = (30 \quad 15 \quad 45)$

$$\text{Produktionsvektor } \vec{p} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Gesamtkosten:

$$K = \vec{k}_V \cdot \vec{p} + 500 = 300 + 300 + 900 + 500 = 2000 \text{ €}$$

Der Erlös soll $2000 \cdot 1,1 = 2200 \text{ €}$ betragen.

Der Verkaufspreisvektor sei $\vec{u} = (u_1 \quad u_2 \quad u_3)$.

Das Verhältnis der variablen Herstellkosten der Endprodukte beträgt
 $30 : 15 : 45 = 2 : 1 : 3$

Somit kann der Verkaufspreisvektor dargestellt werden durch

$$\vec{u} = (2u_2 \quad u_2 \quad 3u_2)$$

Nun muss gelten: $\vec{u} \cdot \vec{p} = 2200$

$$(2u_2 \quad u_2 \quad 3u_2) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} = 100u_2$$

$$100u_2 = 2200 \Leftrightarrow u_2 = 22$$

Der Verkaufspreisvektor lautet $\vec{u} = (44 \quad 22 \quad 66)$.

Verkaufspreis von E_1 : 44€ ; Verkaufspreis von E_2 : 22€ ;

Verkaufspreis von E_3 : 66€