

Hauptprüfung Abiturprüfung 2021

Baden-Württemberg

Teil 4: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Vektorgeometrie

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2021

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

- 2 Ein Flugzeug befindet sich im Landeanflug. Dieser wird modelliert durch g mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -48 \\ -48 \\ 3,1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0,2 \end{pmatrix}; 0 \leq t \leq 15.$$

Hierbei ist t die Zeit in Minuten ($t = 0$ ist der Beginn des Landeanflugs) und die Längeneinheit ist Kilometer (km).

Die x_3 -Koordinate ist die Flughöhe über dem Meeresspiegel.

- 2.1 Die Spitze des Flughafenturms befindet sich in $S(11|14|0,13)$. Berechnen Sie, wie weit das Flugzeug eine Minute nach Beginn des Landeanflugs von der Spitze des Flughafenturms entfernt ist. (3 Punkte)

- 2.2 In einem Flugraum ist ständig mit anderen Flugzeugen zu rechnen. Dieser Flugraum wird zylinderförmig modelliert, wobei der Radius 0,8 km ist und die

Rotationsachse durch die Gerade h mit $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -40 \\ -40 \\ 3,6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$

beschrieben wird. Untersuchen Sie, ob das Flugzeug während seines Landeanflugs in diesen Flugraum eintritt. (3 Punkte)

- 2.3 Die horizontale Landebahn befindet sich auf 100 Meter Höhe über dem Meeresspiegel. Ermitteln Sie den Landepunkt und den Winkel, unter dem das Flugzeug auf der Landebahn aufsetzt. (3 Punkte)

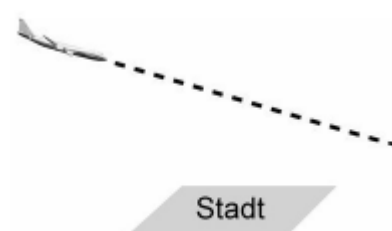
- 2.4 Vor der Landung wurde eine Stadt überflogen. Diese Stadt wird modelliert durch das Rechteck ABCD. Es sind $A(0|0|0,2)$ und $C(11|4|0,2)$. Das Rechteck liegt in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 0,2$ und seine Seiten sind parallel zur x_1 -Achse bzw. x_2 -Achse.

- 2.4.1 Geben sie die Koordinaten der Punkte B und D an. (2 Punkte)

- 2.4.2

Aus Sicherheitsgründen muss das Flugzeug stets mindestens 300m über der Stadt fliegen (siehe Abbildung). Prüfen Sie, ob das Flugzeug diese Mindesthöhe über der Stadt einhält.

(4 Punkte)



Lösungen**2.1 Ort des Flugzeugs nach einer Minute:**

Einsetzen von $t = 1$ in die Gerade ergibt Punkt $P(-44|-44|2,9)$

$$\text{Abstand von P zu S: } |\overrightarrow{PS}| = \left| \begin{pmatrix} 55 \\ 58 \\ -2,77 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{55^2 + 58^2 + (-2,77)^2} \approx 79,98 \text{ km}$$

Die gesuchte Entfernung beträgt ca. 80 km.

2.2 Die Geraden g und h sind windschief.

$$\text{Abstand der beiden Geraden: } d = \left| (\vec{p} - \vec{q}) \cdot \vec{n}_0 \right|$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0,2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und daraus folgt } \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{16,04}} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$d = \left| \left(\begin{pmatrix} -48 \\ -48 \\ 3,1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -40 \\ -40 \\ 3,6 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{16,04}} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{16,04}} \cdot \left| \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{16,04}} \cdot |-1,6 - 2| \approx 0,8989 \text{ km}$$

Da der Abstand der Geraden größer als 0,8 km ist, durchfliegt das Flugzeug diesen Flugraum nicht.

2.3 Schnittpunkt der Gerade g mit der Ebene $x_3 = 0,1$:

$$3,1 - 0,2t = 0,1 \Leftrightarrow t = 15$$

Einsetzen von $t = 15$ in g ergibt den Landepunkt $L(12|12|0,1)$.

Winkel zwischen der Gerade g und der x_1x_2 -Ebene:

$$\sin(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{16 + 16 + 0,04} \cdot \sqrt{1}} \approx 0,0353 \quad \Rightarrow \alpha \approx 2,02^\circ$$

Der Winkel beim Aufsetzen beträgt ca. 2° .

2.4.1 Koordinaten: $B(11|0|0,2)$ und $D(0|4|0,2)$

2.4.2 Die Stadt befindet sich auf einer Höhe von 200 Meter.

Um die Sicherheitsbestimmungen einzuhalten, darf der Flugzeugpunkt einen maximalen x_3 -Wert von 500 Meter = 0,5 besitzen.

$$x_3 = 0,5 \Leftrightarrow 3,1 - 0,2t = 0,5 \Leftrightarrow t = 13$$

Einsetzen von $t = 13$ in die Gerade ergibt $Q(4|4|0,5)$

Der Punkt Q liegt genau über der Stadtgrenzenlinie CD.

Nach $t = 14$ Minuten befindet sich das Flugzeug im Punkt $R(8|8|0,3)$.

Hier fliegt das Flugzeug zwar niedriger, aber der Punkt R liegt außerhalb der Stadtgrenzen.

Somit wird die Mindesthöhe von 300m überall beim Flug über die Stadt eingehalten.