

Hauptprüfung Abiturprüfung 2021

Baden-Württemberg

Teil 4: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Vektorgeometrie

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2021

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

- 1 In einem Museum gibt es einen quaderförmigen Raum, in dem ein Kunstwerk in Pyramidenform ausgestellt wird. Die Seitenflächen der Pyramide sind undurchsichtig. Im Modell liegt der Boden des Raums in einem Teil der x_1x_2 -Ebene mit $x_2 \geq 0$.
- Die quadratische Grundfläche ABCD der Pyramide hat die Eckpunkte $A(0|4|0)$, $B(4|4|0)$, $C(4|8|0)$ und D. Die Spitze S der Pyramide liegt vier Längeneinheiten senkrecht über dem Schnittpunkt der beiden Diagonalen der Grundfläche. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter (m).
- 1.1 Begründen Sie, dass die Spitze der Pyramide im Punkt $S(2|6|4)$ liegt. (2 Punkte)
- 1.2 Zeichnen Sie die Pyramide in ein räumliches Koordinatensystem ein. (3 Punkte)
- 1.3 Die Seitenflächen der Pyramide werden mit einem Material beschichtet, das 1500 Euro pro Quadratmeter kostet. Ermitteln Sie die Kosten dieser Beschichtung. (2 Punkte)
- 1.4 Der Raum wird nach einer Seite hin durch eine fensterlose Wand begrenzt, die Teil der x_1x_3 -Ebene mit $x_3 \geq 0$ ist. Die gegenüberliegende Wand besteht aus Glas. Vormittags trifft Sonnenlicht durch die Glaswand ein. Das Sonnenlicht verläuft in Richtung des Vektors $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix}$ und verursacht einen Schatten der gesamten Pyramide. Untersuchen Sie, ob dieser Schatten auf die fensterlose Wand trifft. (4 Punkte)
- 1.5 Im Punkt $K(0|9|3)$ ist eine Überwachungskamera angebracht, wobei die Pyramide die Überwachung des gesamten Raumes verhindert. Ein punktförmiges Objekt bewegt sich vom Punkt $P(5|4|2)$ aus in Richtung des Vektors $\overrightarrow{AC}$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q, an dem das Objekt von der Kamera erstmalig erfasst werden kann. (4 Punkte)

Lösungen

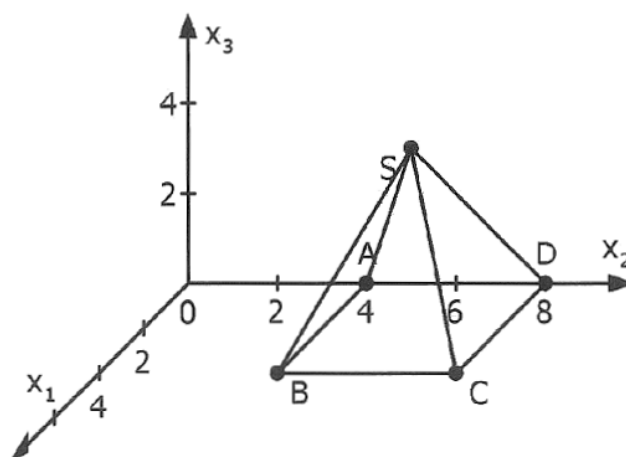
- 1.1 Die Spitze S befindet sich 4 Meter oberhalb des Mittelpunktes M der quadratischen Grundfläche.

M ist der Mittelpunkt der Strecke AC, also $M\left(\frac{0+4}{2} \mid \frac{4+8}{2} \mid \frac{0+0}{2}\right)$

also $M(2 \mid 6 \mid 0)$.

Mit der Höhe 4 Meter ergibt sich die Spitze $S(2 \mid 6 \mid 4)$.

- 1.2 Zeichnung:



- 1.3 Berechnung des Inhalts der Seitenfläche BCS:

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

Die Grundseite beträgt $g = 4$ Meter.

Der Mittelpunkt der Strecke BC ist $M_{BC}(4 \mid 6 \mid 0)$

$$\text{Höhe des Dreiecks} = |\overrightarrow{M_{BC}S}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 0 + 16} = \sqrt{20}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{20}$$

Der Gesamthalt aller Seitenflächen beträgt $4 \cdot A = 8 \cdot \sqrt{20} = 16 \cdot \sqrt{5} \text{ m}^2$

Kosten der Beschichtung: $1500 \cdot 16 \cdot \sqrt{5} \approx 53.666 \text{ Euro}$

- 1.4 Es wird der Schattenpunkt der Pyramidenspitze S berechnet.
Die Gerade, die das Sonnenlicht beschreibt hat die Gleichung

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt der Gerade g mit der x_1x_3 -Ebene:

$$x_2 = 0 \Rightarrow 6 - 10r = 0 \Leftrightarrow r = 0,6$$

Einsetzen von $r = 0,6$ in die Gerade ergibt den Schnittpunkt $H(3,2|0|-0,8)$.

Der Punkt H einen negativen x_3 -Wert besitzt, trifft der Schatten der Pyramide nicht auf die fensterlose Wand.

(Das Sonnenlicht trifft vor dem Auftreffen auf die fensterlose Wand auf den Boden des Quaders, also auf die x_1x_2 -Ebene.

1.5 Gleichung der Gerade, auf der sich der Punkt P bewegt: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der gesuchte Punkt Q entspricht dem Schnittpunkt der Gerade h mit der Ebene E, die durch die Punkte K, S und C verläuft.

Parameterform von E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ bzw. vereinfacht $\vec{n}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Koordinatengleichung von E: $x_1 + x_2 + x_3 = d$

Einsetzen von $K(0|9|3)$: $d = 12$

Koordinatengleichung von E: $x_1 + x_2 + x_3 = 12$

Schnittpunkt von E und h: $(5 + 4s) + (4 + 4s) + 2 = 12 \Leftrightarrow s = 0,125$

Einsetzen von $s = 0,125$ in die Gerade h ergibt $Q(5,5|4,5|2)$.