

Hauptprüfung Abiturprüfung 2021

Baden-Württemberg

Teil 3 (mit Hilfsmittel)

Stochastik

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2021

Stochastik

1

Eine Firma stellt Holzspielzeuge her. Abbildung 1 illustriert die Funktionsweise eines sogenannten Galton-Bretts. Bei diesem Spielzeug werden Kugeln von oben in einen Schacht gegeben und diese prallen dann auf runde Stifte, die sie jeweils entweder links oder rechts passieren, bevor sie in einem der unteren Fächer aufgefangen werden. Das in Abbildung 1 dargestellte Galton-Brett hat die Länge vier, da jede Kugel an vier Stiften abprallt, bevor sie in einem der fünf Fächer landet. Ist ein ideales Galton-Brett waagerecht aufgestellt, so prallt jede Kugel von jedem Stift mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 nach jeweils einer der beiden Seiten ab.

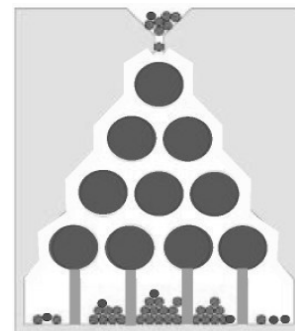


Abbildung 1

1.1 Eine Kugel wird in das Galton-Brett gegeben.

1.1.1 Erläutern Sie, warum der Pfad der Kugel durch eine Bernoulli-Kette beschrieben werden kann. Definieren Sie in diesem Zusammenhang eine binomialverteilte Zufallsvariable X und geben Sie die möglichen Werte von X für ein Galton-Brett der Länge vier an.

(4 Punkte)

1.1.2 Berechnen Sie für ein Galton-Brett der Länge vier jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Die Kugel landet in einem der beiden Fächer rechts vom mittleren Fach.

B: Die Kugel landet nicht in einem der beiden äußeren Fächer.

(4 Punkte)

1.2. Erfahrungsgemäß fallen 5% der produzierten Galton-Bretter bei der Qualitätskontrolle durch. Diese werden als mangelhaft bezeichnet. Prüfen Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist: „Mindestens 46 Galton-Bretter müssen überprüft werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% mindestens ein mangelhaftes Brett zu finden.“

(3 Punkte)

1.3

Jemand stellt ein Galton-Brett der Länge acht schräg auf (vgl. Abbildung 2). Die Schrägstellung ist so, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel im mittleren Fach landet, den Wert 0,1 hat.

Eine Kugel wird in das Galton-Brett gegeben.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel an den Stiften nach links abprallt.

(4 Punkte)

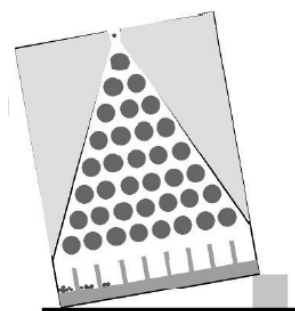


Abbildung 2

Lösungen

- 1.1.1 Prallt eine Kugel auf einem Stift auf, gibt es nur 2 Möglichkeiten: Die Kugel wandert nach links oder nach rechts.
Da es nur 2 Möglichkeiten gibt, handelt es sich um ein Bernoulli-Experiment. Die Wiederholungen des Experiments sind stochastisch unabhängig (das heißt die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel nach links oder rechts wandert bleibt gleich). Daher handelt es sich um eine Bernoulli-Kette.

X = Anzahl der Fälle, in denen die Kugel beim Aufprall auf einen Stift nach rechts wandert.

Mögliche Werte von X : 0, 1, 2, 3, 4

Hinweis: Man könnte X auch als die Anzahl der Fälle definieren, in denen die Kugel nach links wandert.

- 1.1.2 A: Die Kugel landet in einem der beiden Fächer rechts vom mittleren Fach, wenn die Kugel entweder viermal oder dreimal nach rechts läuft.

$$P(A) = P(X = 4) + P(X = 3)$$

X ist binomialverteilt mit $n = 4$ und $p = 0,5$.

$$\text{WTR: } P(X = 4) + P(X = 3) = 0,0625 + 0,25 = 0,3125$$

B: Der Fall tritt ein, wenn die Kugel nicht viermal nach rechts oder viermal nach links läuft.

$$P(B) = 1 - P(X = 4) - P(X = 0) = 1 - 0,0625 - 0,0625 = 0,875$$

- 1.2 Die Zufallsvariable Y gibt die Anzahl der mangelhaften Bretter an.
 Y ist binomialverteilt mit unbekanntem n und $p = 0,05$.

Bedingung: $P(Y \geq 1) > 0,9$

$$\Leftrightarrow 1 - P(Y = 0) > 0,9$$

$$\Leftrightarrow P(Y = 0) < 0,1$$

WTR:

$$n = 44: P(Y = 0) \approx 0,105$$

$$n = 45: P(Y = 0) \approx 0,099$$

Es müssen mindestens 45 Galton-Bretter überprüft werden.
Die Aussage ist somit falsch.

- 1.3 Die Zufallsvariable Z gibt die Anzahl der Fälle an, an denen die Kugel nach links abprallt.

Z ist binomialverteilt mit $n = 8$ und unbekanntem p .

Die Kugel landet im mittleren Fach, wenn die Kugel viermal nach links und viermal nach rechts abprallt.

Bekannt: $P(Z = 4) = 0,1$

WTR:

$$P(Z = 4) = \binom{8}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)^4$$

$$\Leftrightarrow 70 \cdot p^4 \cdot (1-p)^4 = 0,1$$

$$p^4 \cdot (1-p)^4 = \frac{1}{700} \Leftrightarrow p \cdot (1-p) = \sqrt[4]{\frac{1}{700}} \Leftrightarrow p - p^2 = 0,1944$$

$$\Leftrightarrow -p^2 + p - 0,1944 = 0$$

$$\text{abc-Formel: } p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-1) \cdot (-0,1944)}}{-2} = \frac{-1 \pm 0,4716}{-2}$$

$$p_1 = 0,2642 \text{ und } p_2 = 0,736$$

Da $p > 0,5$ sein muss (die Wahrscheinlichkeit ist aufgrund der Kipplage des Galton-Brettes größer als 0,5) kommt nur $p = 0,736$ in Frage.