

Hauptprüfung Abiturprüfung 2021

Baden-Württemberg

Teil 2: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Anwendungsorientierte Analysis

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2021

Anwendungsorientierte Analysis

- 4 Marie und Pierre Curie entdeckten 1898 gemeinsam das radioaktive Isotop Radium 226. Für dieses ist bekannt, dass die Halbwertszeit etwa 1600 Jahre beträgt. Die Halbwertszeit gibt an, wie viel Zeit vergeht, bis von einer gegebenen Menge eines zerfallenden Stoffes nur noch die Hälfte vorhanden ist.

Die Kerne von Radium zerfallen und geben dabei die sogenannte α -Strahlung ab. Der Zerfall der Radiumkerne kann mit der Funktion f mit $f(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$; $t \geq 0$, beschrieben werden. Dabei sind $c > 0$ und $k < 0$ geeignete Konstanten und $f(t)$ die zum Zeitpunkt t in Jahren nach Beobachtungsbeginn $t = 0$ vorhandene Masse von Radium 226 in Gramm (g).

- 4.1 Ermitteln Sie den Wert von k sowie die Masse einer Probe zu Beobachtungsbeginn, falls 20 Jahre danach noch 99,14 g Radium vorhanden sind.

(3 Punkte)

- 4.2 Erläutern Sie im Sachkontext, welcher Zeitpunkt t mit dem Ansatz

$$\frac{f(0) - f(t)}{f(0)} = 0,9$$

bestimmt werden kann.

(2 Punkte)

- 4.3 Es wird nun eine andere Probe betrachtet. Für die Modellierung von deren Zerfall gelten: $c = 150$ und $k = -4,332 \cdot 10^{-4}$.

- 4.3.1 Geben Sie den Zeitpunkt an, an dem am meisten Radium zerfällt und bestimmen Sie zu diesem Zeitpunkt die Änderungsrate von f .

(2 Punkte)

- 4.3.2 Beweisen Sie, dass die folgende Aussage wahr ist:
„Zu jedem beliebigen Zeitpunkt t gilt: Der Anteil, der a Jahre später von der Masse $f(t)$ noch vorhanden ist, hängt nur von a ab.“

(3 Punkte)

Lösungen

4.1 $f(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt der Anfangsbestand $f(0) = c$.

Nach 1600 Jahren ist nur noch die Hälfte des Anfangsbestandes vorhanden.

$$f(1600) = \frac{1}{2}c$$

$$\frac{1}{2}c = c \cdot e^{k \cdot 1600} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{k \cdot 1600} \quad (c \text{ kann man wegdividieren})$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\ln(0,5)}{1600} \approx -0,000433$$

Außerdem soll gelten: $f(20) = 99,14 \Leftrightarrow c \cdot e^{-0,000433 \cdot 20} = 99,14$

$$\Leftrightarrow c = \frac{99,14}{e^{-0,000433 \cdot 20}} \approx 100$$

Zu Beginn beträgt die Masse $c = 100$ Gramm.

- 4.2. Der Term $f(t)$ gibt die zum Zeitpunkt t vorhandene Masse von Radium an.
Der Term $f(0) - f(t)$ gibt die Masse an Radium an, die von Beobachtungsbeginn bis zum Zeitpunkt t zerfallen ist.

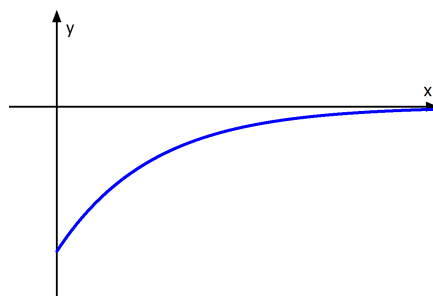
Durch $\frac{f(0) - f(t)}{f(0)} = 0,9$ bzw. $f(0) - f(t) = 0,9 \cdot f(0)$ kann der Zeitpunkt t bestimmt

werden, an dem 90% der zu Beobachtungsbeginn vorhandenen Radiummasse zerfallen sind.

4.3.1 Nun gilt $f(t) = 150 \cdot e^{-0,0004332 \cdot t}$

Momentane Änderungsrate: $f'(t) = -0,06498 \cdot e^{-0,0004332 \cdot t}$

Das Schaubild der Funktion f' hat folgende Gestalt:



Die Funktion f' ist streng monoton wachsend. Somit zerfällt am meisten Radium zum Zeitpunkt $t = 0$ (also an der Stelle mit dem kleinsten y -Wert).

Änderungsrate zum Zeitpunkt $t = 0$: $f'(0) = -0,06498$ Gramm pro Jahr

4.3.2 Bestand zum Zeitpunkt t: $f(t)$ Bestand a Jahre später (zum Zeitpunkt $t + a$): $f(t+a)$ Anteil von $f(t+a)$ an $f(t)$:

$$\frac{f(t+a)}{f(t)} = \frac{150e^{-0,0004332 \cdot (t+a)}}{150e^{-0,0004332t}} = \frac{e^{-0,0004332t-0,0004332a}}{e^{-0,0004332t}} = e^{-0,0004332a}$$

Somit hängt der Anteil nur vom Wert von a ab.

Hinweis: Bei der letzten Umformung wurde das Potenzgesetz $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ verwendet.