

Hauptprüfung Abiturprüfung 2021

Baden-Württemberg

Teil 2: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Anwendungsorientierte Analysis

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2021

Anwendungsorientierte Analysis

3

Ein Fadenpendel besteht aus einem Faden, an dessen unterem Ende eine Kugel befestigt ist. Das Pendel wird in Position P1 gebracht und zum Zeitpunkt $t = 0$ losgelassen.

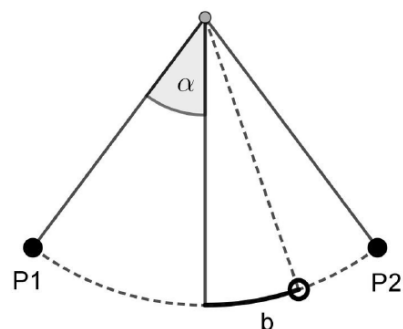
Anschließend führt es eine Schwingung aus.

Die Geschwindigkeit der Kugel wird modelliert durch v mit $v(t) = 0,5 \cdot \sin(5t)$ mit $t \geq 0$.

Dabei wird t die Zeit in Sekunden (s)

und $v(t)$ wird in Meter pro Sekunde $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$

angegeben.



- 3.1 Bestimmen Sie die Zeit, die vom Zeitpunkt des Loslassens an vergeht, bis die Kugel zum ersten Mal den Umkehrpunkt P2 erreicht.

(2 Punkte)

- 3.2 Die Beschleunigung der Kugel ist die Änderungsrate der Geschwindigkeit. Bestimmen Sie die momentane Beschleunigung der Kugel 0,2 Sekunden nach dem Loslassen sowie die durchschnittliche Beschleunigung innerhalb der ersten 0,2 Sekunden.

(3 Punkte)

- 3.3 Die Funktion b mit $b(t) = -0,1 \cdot \cos(5t)$; $t \geq 0$ modelliert die Auslenkung des Pendels, wobei $b(t)$ die „Länge“ des Bogens vom tiefsten Punkt bis zur Position der Kugel zum Zeitpunkt t ist (siehe Abbildung). Negative Werte von $b(t)$ bedeuten dabei Auslenkungen nach links (in Richtung von P1), positive Werte bedeuten Auslenkungen nach rechts.

- 3.3.1 Zeigen Sie, wie man ausgehend von v auf die Funktion b gelangt.

(3 Punkte)

- 3.3.2 Die Länge des Fadenpendels ist 0,4m. Berechnen Sie den Auslenkungswinkel α zum Zeitpunkt des Loslassens (siehe Abbildung).

Lösungen

- 3.1 Die Periodendauer der Funktion ist $T = \frac{2\pi}{5} \approx 1,257$ Sekunden.

Das Pendel erreicht den Umkehrpunkt P2 nach einer halben Periode, also nach ca. 0,63 Sekunden.

- 3.2 Beschleunigungsfunktion: $a(t) = v'(t) = 0,5 \cdot 5 \cdot \cos(5t) = 2,5 \cdot \cos(5t)$

Momentane Beschleunigung nach 0,2 Sekunden: $v'(0,2) \approx 1,35 \text{ m/s}^2$

Durchschnittliche Beschleunigung innerhalb der ersten 0,2 Sekunden:

$$\frac{1}{0,2-0} \cdot \int_0^{0,2} a(t) dt = \frac{1}{0,2} \cdot [v(t)]_0^{0,2} = \frac{1}{0,2} \cdot (v(0,2) - v(0)) \approx \frac{1}{0,2} \cdot 0,42 = 2,1 \text{ m/s}^2$$

- 3.3.1 Die Geschwindigkeit v ist die momentane Änderungsrate der zurückgelegten Wegstrecke. Diese entspricht hier der Funktion b .
Damit ist b eine Stammfunktion von v :

$$b(t) = -0,5 \cdot \frac{1}{5} \cos(5t) + C = -0,1 \cdot \cos(5t) + C$$

Nach einem Viertel der Periodendauer, also zum Zeitpunkt $t = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{10}$

befindet sich die Kugel im tiefsten Punkt.

Dort soll gelten: $b(\frac{\pi}{10}) = 0$

$$b(\frac{\pi}{10}) = -0,1 \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) + C = C \Rightarrow C = 0$$

Damit ist die gesuchte Funktion $b(t) = -0,1 \cdot \cos(5t)$.

- 3.3.2 Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt $b(0) = -0,1$.

Das heißt der Bogen von P1 bis zum tiefsten Punkt hat eine Länge von 0,1.

Nun gilt die Formel für einen Kreisbogen:

$$b = 2\pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \Leftrightarrow \alpha = \frac{0,1 \cdot 360^\circ}{2\pi \cdot 0,4} = \frac{45^\circ}{\pi} \approx 14,3^\circ$$

Damit beträgt der Winkel etwa $14,3^\circ$.