

Hauptprüfung Abiturprüfung 2021

Baden-Württemberg

Teil 2: Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

Analysis

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2021

Analysis

- 1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -e^{2x} + 4e^x$; $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K .
- 1.1 K besitzt mit den Koordinatenachsen jeweils genau einen Schnittpunkt.
Überprüfen Sie, ob dies die Punkte $S_y(0 | 3)$ und $N(\ln(4) | 0)$ sind.
(2 Punkte)
- 1.2 Zeigen Sie, dass für die erste Ableitung f' von f gilt: $f'(x) = 2e^x \cdot (2 - e^x)$.
Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art es Extremums von K .
(4 Punkte)
- 1.3 Zeichnen Sie K für $-5 \leq x \leq 1,5$.
(3 Punkte)
- 1.4 Prüfen Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:
„Der Inhalt der Fläche, die K mit den Koordinatenachsen im 1. Quadrant einschließt, ist das Doppelte des Mittelwertes von f auf dem Intervall $[0; \ln(4)]$.“
(3 Punkte)
- 1.5 Die Gerade mit der Gleichung $y = c$ schneidet K in zwei Punkten $P(x_p | c)$ und $Q(x_q | c)$ mit $x_p < 0$ und $x_q > 0$.
- 1.5.1 Geben Sie alle möglichen Werte für c an.
(2 Punkte)
- 1.5.2 Es gilt nun $c = 1$.
Zeigen Sie, dass dann die y -Achse die Strecke PQ halbiert.
(4 Punkte)
- 1.6 Untersuchen Sie, ob das Schaubild der auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit $g(x) = f(x) + f(-x)$ symmetrisch ist.
Geben Sie gegebenenfalls die Art der Symmetrie an.
(2 Punkte)

Lösungen

1.1 Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 3 \Rightarrow S_y(0 | 3)$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$

$$-e^{2x} + 4e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x \cdot (-e^x + 4) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $e^x = 0$ Gleichung ist nicht lösbar

$$\text{Gleichung II): } -e^x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \ln(4)$$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $N(\ln(4)|0)$.

Die angegebenen Punkte sind die Schnittpunkte.

1.2 Ableitung von f: $f'(x) = -2e^{2x} + 4e^x = 2e^x \cdot (-e^x + 2) = 2e^x \cdot (2 - e^x)$

Hinreichende Bedingung für ein Extremum: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$$\text{Es gilt } f''(x) = -4e^{2x} + 4e^x$$

$$2e^x \cdot (2 - e^x) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $2e^x = 0$ Gleichung ist nicht lösbar

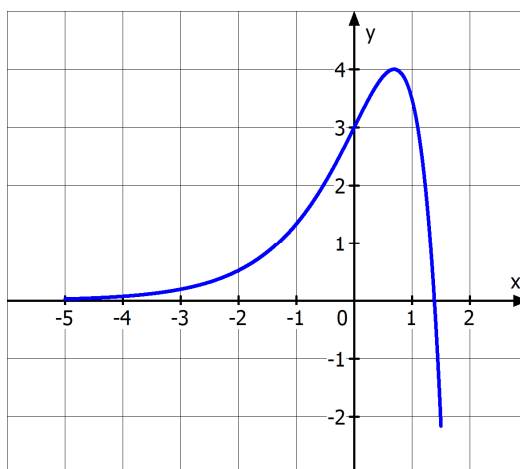
$$\text{Gleichung II): } 2 - e^x = 0 \Leftrightarrow x = \ln(2)$$

$$f''(\ln(2)) = -4e^{2 \cdot \ln(2)} + 4e^{\ln(2)} = -8 < 0$$

Damit existiert bei $x = \ln(2)$ ein Hochpunkt.

Wegen $f(\ln(2)) = 4$ lautet der Hochpunkt $H(\ln(2)|4)$.

1.3 Schaubild K:



1.4 Fläche A von K mit den Koordinatenachsen: $A = \int_0^{\ln(4)} f(x) dx$

$$\text{Mittelwert } m: m = \frac{1}{\ln(4) - 0} \cdot \int_0^{\ln(4)} f(x) dx = \frac{1}{\ln(4)} \cdot \int_0^{\ln(4)} f(x) dx$$

$$\text{Verhältnis von A zu m: } \frac{A}{m} = \frac{\int_0^{\ln(4)} f(x) dx}{\frac{1}{\ln(4)} \cdot \int_0^{\ln(4)} f(x) dx} = \ln(4) \approx 1,39$$

Da das Verhältnis nicht 2 ergibt, ist die Aussage falsch.

Für die Prüfung der Gültigkeit der Aussage ist die Berechnung der Integrale nicht notwendig.

1.5.1 Die Gerade $y = c$ ist eine waagrechte Gerade auf der Höhe c .
Für $0 < c < 3$ schneidet die waagrechte Gerade das Schaubild K in zwei Punkten, wobei ein x -Wert negativ und ein x -Wert positiv ist.

1.5.2 Schnittpunkt von K mit der Gerade $y = 1$:

$$-e^{2x} + 4e^x = 1 \quad \text{Substitution: } u = e^x$$

$$-u^2 + 4u - 1 = 0 \quad \text{abc-Formel: } u_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{-2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\text{Rücksubstitution: } e^x = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \ln(2 + \sqrt{3}) \approx 1,317$$

$$e^x = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \ln(2 - \sqrt{3}) \approx -1,317$$

Schnittpunkte: $P(\ln(2 - \sqrt{3}) | 1)$ und $Q(\ln(2 + \sqrt{3}) | 1)$

Mit dem WTR kann überprüft werden, dass $\ln(2 + \sqrt{3}) = -\ln(2 - \sqrt{3})$ ist.

Somit sind die Punkte P und Q gleich weit von der y -Achse entfernt und die y -Achse die Strecke PQ halbiert.

1.6 Es gilt $g(x) = f(x) + f(-x) = -e^{2x} + 4e^x + (-e^{-2x} + 4e^{-x}) = -e^{2x} + 4e^x - e^{-2x} + 4e^{-x}$

$$\text{Es gilt } g(-x) = -e^{-2x} + 4e^{-x} - e^{2x} + 4e^x = g(x)$$

Das Schaubild von g ist somit symmetrisch zur y -Achse.