

Hauptprüfung Abiturprüfung 2021

Baden-Württemberg

Teil 1 (ohne Hilfsmittel)

Analysis, Stochastik, Vektorgeometrie, Matrizenrechnung

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2021

Analysis

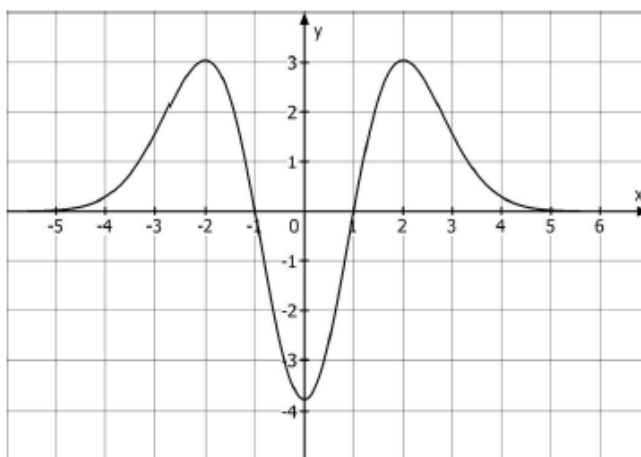
1.1 Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$; $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild von f ist K_f .

1.1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von f und skizzieren Sie K_f ohne weitere Rechnung. (4 Punkte)

1.1.2 Ermitteln Sie die x -Koordinate des Punktes, in dem K_f die Steigung $\frac{3}{2}$ hat. (2 Punkte)

1.2 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds einer Funktion s .



Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

Begründen Sie:

- (1) Es gilt: $s''(4) < 0$.
- (2) Das Schaubild der Ableitungsfunktion s' von s besitzt für $0 < x < 2$ einen Hochpunkt.
- (3) Der Wert von $\int_0^4 s(x) dx$ ist größer als 0. (5 Punkte)

1.3 Die Funktion d ist für $x > 0$ gegeben durch $d(x) = \frac{1}{x^2} + x^2$ und D ist eine Stammfunktion von d .

Zeigen Sie:

- (1) D ist für $x > 0$ monoton wachsend.
- (2) Die Stelle $x = 1$ ist die einzige Wendestelle von D . (4 Punkte)

Stochastik

- 2.1 Eine Fußballmannschaft gewinnt jedes ihrer Spiele mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$.

- 2.1.1 Das Ereignis A hat die folgende Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$$

Geben Sie eine Formulierung für das Ereignis A im Sachzusammenhang an.
(2 Punkte)

- 2.1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft von vier Spielen genau zwei Spiele gewinnt und diese aufeinander folgen.
(2 Punkte)

- 2.2 Eine andere Mannschaft wird von ihren Misserfolgen demotiviert. Die Mannschaft gewinnt das erste Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von p . Gewinnt sie das erste Spiel nicht, so ist die Wahrscheinlichkeit dann das zweite Spiel zu gewinnen $\frac{1}{2}p$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft mindestens eines der beiden Spiele gewinnt, beträgt $\frac{4}{9}$.

Begründen Sie, dass durch Lösen der Gleichung

$$1 - (1-p) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}p\right) = \frac{4}{9}$$

die Wahrscheinlichkeit p ermittelt werden kann.

(4 Punkte)

Stochastik

- 2 In einer Urne befinden sich zunächst neun Kugeln.
Vier Kugeln haben die Farbe blau, zwei sind weiß und drei sind grün.
- 2.1 Zwei Kugeln werden nacheinander aus der Urne ohne Zurücklegen gezogen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
- A: Die beiden gezogenen Kugeln sind weiß.
- B: Unter den beiden gezogenen Kugeln befindet sich mindestens eine weiße Kugel.
- C: Eine der beiden gezogenen Kugeln ist weiß und die andere blau.
- (5 Punkte)
- 2.2 Es wird nun eine unbekannte Anzahl x von grünen Kugeln der Urne hinzugefügt, sodass bei zweimaligem Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit zwei grüne Kugeln zu ziehen genau 50% ist.
- Ermitteln Sie eine Gleichung mit der x berechnet werden kann.
- (3 Punkte)

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

- 3 Die Punkte A(5|1|0), B, C und D liegen in einer gemeinsamen Ebene

und es gilt: $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Der Schnittpunkt von $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BD}$ liegt in der Mitte von A und C.

- 3.1 Begründen Sie, dass $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BD}$ einen rechten Winkel einschließen und den gleichen Betrag haben.

(3 Punkte)

- 3.2 Fertigen Sie eine geeignete zweidimensionale Skizze an, die zeigt, dass das Viereck ABCD kein Quadrat sein muss.

(2 Punkte)

- 3.3 Ermitteln Sie für den Fall, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist, die Koordinaten der Eckpunkte B und D.

(2 Punkte)

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

3.1 Berechnen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & -4 \\ -x_1 & +2x_2 & & = & -3 \\ & x_2 & +x_3 & = & 2 \end{array}$$

(3 Punkte)

3.2 Gegeben sind die Geraden g und h mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$$

3.2.1 Zeigen Sie, dass g und h parallel aber nicht identisch sind.

(2 Punkte)

3.2.2 Bestimmen Sie einen Punkt P, der von g und h den gleichen Abstand hat.

(2 Punkte)

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

- 3.1 Gegeben sind die Matrizen A und B. Die Matrix A hat 2 Zeilen und 3 Spalten, d.h. A hat das Format 2 x 3. B hat das Format 3 x 2.

Geben Sie an, welche der folgenden beiden Berechnungen möglich ist:

(1) $3 \cdot A + 2 \cdot B$

(2) $A \cdot B$

Bestimmen Sie das Format der Ergebnismatrix. (2 Punkte)

- 3.2 Für jede Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ bezeichnet $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ die transponierte Matrix von A.

Eine Matrix A heißt orthogonal, falls $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 3.2.1 Prüfen Sie, ob die Matrix

$$\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$$

orthogonal ist. (2 Punkte)

- 3.2.2 Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^5$ orthogonal ist. (3 Punkte)

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

- 3.1 Berechnen Sie den Lösungsvektor des linearen Gleichungssystems, das durch die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix gegeben ist:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

(3 Punkte)

- 3.2 Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- 3.2.1 Zeigen Sie, dass die Matrizenmultiplikation von A und B nicht kommutativ ist, das heißt $A \cdot B \neq B \cdot A$. (2 Punkte)

- 3.2.2 Durch Abänderung genau eines Koeffizienten der Matrix B lässt sich eine Matrix $\tilde{B}$ erzeugen, die die folgenden beiden Eigenschaften hat:

- (1) $\tilde{B} \neq A$.
- (2) Die Matrizenmultiplikation von A und $\tilde{B}$ ist kommutativ.

Geben Sie eine mögliche Matrix $\tilde{B}$ an. (2 Punkte)

Lösungen**Analysis**1.1.1 Nullstellen von $f: f(x) = 0$

$$-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) = 0 \quad \text{Lösung mit Satz vom Nullprodukt}$$

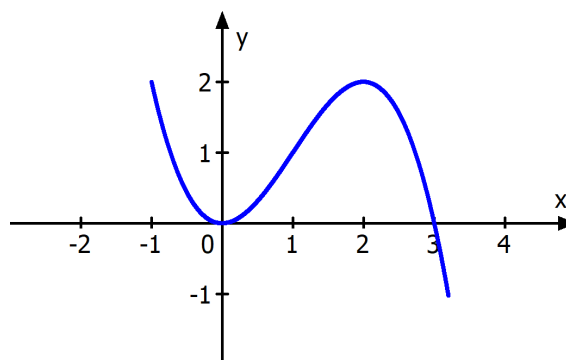
$$\text{Gleichung I): } x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad x = 0$$

$$\text{Gleichung II): } -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Skizze:

Die Funktion besitzt eine doppelte Nullstelle $x = 0$ und eine einfache Nullstelle $x = 3$.

Da es sich um eine Polynomfunktion 3. Grades handelt und der Faktor vor dem höchsten Grad $(-\frac{1}{2})$ negativ ist, kommt das Schaubild aus dem 2. Quadrant und geht in den 4. Quadrant.

1.1.2 Es gilt $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$

$$\text{Bedingung: } -\frac{3}{2}x^2 + 3x = \frac{3}{2} \quad | \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 3 \quad | :3$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\text{abc-Formel: } x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{-2} = \frac{-2 \pm 0}{-2} = 1$$

Die gesuchte x-Koordinate ist $x = 1$.

1.2

(1) Die Aussage ist falsch. Das Schaubild ist an der Stelle $x = 4$ linksgekrümmt, daher muss $s''(4) > 0$ sein.

- (2) Die Aussage ist wahr: Im Intervall $0 < x < 2$ besitzt das Schaubild von s einen Wendepunkt. Da die Steigung der Tangente an der Wendestelle maximal ist, hat das Schaubild der Ableitungsfunktion s' an der Stelle ein Hochpunkt.
- (3) Die Aussage ist wahr. Über dem Intervall $[0;4]$ ist der Inhalt der Fläche unterhalb der x -Achse kleiner als der Inhalt der Fläche oberhalb der x -Achse.

- 1.3 (1) Die Funktion $D(x)$ ist monoton wachsend, wenn $D'(x) = d(x) > 0$ ist für $x > 0$.

Diese Bedingung ist erfüllt, da sowohl $\frac{1}{x^2}$ als auch x^2 nur positive Werte annehmen können.

- (2) Die Funktion $d(x)$ kann umgeschrieben werden in $d(x) = x^{-2} + x^2$.

$$D''(x) = d'(x) = -2x^{-3} + 2x = -\frac{2}{x^3} + 2x$$

$$D'''(x) = d''(x) = 6x^{-4} + 2 = \frac{6}{x^4} + 2$$

Bedingung für Wendestelle: $D''(x) = 0$ und $D'''(x) \neq 0$

$$-\frac{2}{x^3} + 2x = 0 \quad | \cdot x^3$$

$$-2 + 2x^4 = 0 \quad \Leftrightarrow x^4 = 1 \quad \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{1} = \pm 1$$

Wegen der Bedingung $x > 0$ kommt nur $x = 1$ in Betracht.

Weil $D'''(1) = 6 + 2 = 8 \neq 0$ ist, handelt es sich um eine Wendestelle.

Stochastik

2.1.1 Die Formel zeigt die Bernoulli-Formel mit $n = 10$ und $p = \frac{2}{3}$.

Interpretation von A: Die Mannschaft gewinnt genau 9 von 10 Spielen.

2.1.2 Es gibt folgende Reihenfolgen, mit der die Bedingung erfüllt ist
(G = Mannschaft gewinnt, V = Mannschaft verliert)

GGVV, VGGV, VVGG

Jede dieser Kombinationen hat die Wahrscheinlichkeit $P = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{81}$

Da es drei Kombinationen gibt, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P = 3 \cdot \frac{4}{81} = \frac{4}{27}$$

2.2 Es ist bekannt: $P(\text{Mannschaft gewinnt mindestens ein Spiel}) = \frac{4}{9}$

$P(\text{Mannschaft gewinnt das erste Spiel}) = p$

$P(\text{Mannschaft verliert das erste Spiel}) = 1 - p$

$P(\text{Mannschaft verliert beide Spiele}) = (1-p) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}p\right) \quad (*)$

$P(\text{Mannschaft gewinnt mindestens ein Spiel}) = 1 - (1-p) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}p\right)$

Hinweis: Dies ist das Gegenereignis von (*).

Somit gilt die Bedingung: $1 - (1-p) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}p\right) = \frac{4}{9}$

Stochastik

$$2.1 \quad P(A) = P(\overline{ww}) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{36}$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{ww}) = 1 - \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

$$P(C) = P(wb) + P(bw) = \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{16}{72} = \frac{2}{9}$$

$$2.2 \quad \text{Es muss gelten: } P(gg) = \frac{1}{2}$$

Zu Beginn sind $x + 3$ grüne Kugeln in der Urne.
Insgesamt sind $x + 9$ Kugeln in der Urne.

$$\text{Gesuchte Gleichung: } \frac{x+3}{x+9} \cdot \frac{x+2}{x+8} = \frac{1}{2}$$

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

3.1 Nachweis der Orthogonalität: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = 12 - 12 + 0 = 0$

Da das Skalarprodukt der Vektoren 0 ergibt, schließen die Vektoren einen rechten Winkel ein.

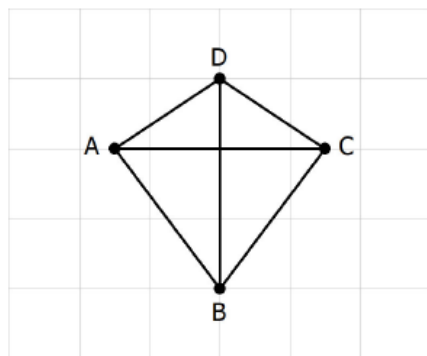
Nachweis gleicher Betrag: $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{36 + 36 + 0} = \sqrt{72}$
 $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{4 + 4 + 64} = \sqrt{72}$

3 Die Punkte A(5|1|0), B, C und D liegen in einer gemeinsamen Ebene

und es gilt: $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Der Schnittpunkt von $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BD}$ liegt in der Mitte von A und C.

3.2 Skizze:



3.3 Wenn das Viereck ABCD ein Quadrat ist, dann würde auch die Diagonale BD halbiert werden.

Berechnung von B: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

Koordinaten von B: B(3|5|-4)

Berechnung von D: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Koordinaten von D: D(1|3|4)

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & -4 \\
 3.1 & -x_1 & +2x_2 & & = -3 \\
 & & x_2 & +x_3 & = 2
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}
 \quad \text{Addition der Zeilen}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & -4 \\
 & 4x_2 & -x_3 & = & -7 \\
 & x_2 & +x_3 & = & 2 \quad | \cdot (-4)
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl}
 x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & -4 \\
 & 4x_2 & -x_3 & = & -7 \\
 & & -5x_3 & = & -15
 \end{array}$$

Aus der 3. Zeile folgt: $x_3 = 3$

Aus der 2. Zeile folgt: $4x_2 - 3 = -7 \Leftrightarrow x_2 = -1$

Aus der 1. Zeile folgt: $x_1 - 2 - 3 = -4 \Leftrightarrow x_1 = 1$

Lösungsmenge: $L = \{ (1|-1|3) \}$

3.2.1 Die Richtungsvektoren der Geraden sind Vielfache zueinander:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \text{daher sind die Geraden parallel.}$$

Die Geraden sind identisch, wenn der Punkt $A(1|-1|2)$ der Gerade g auch auf der Gerade h liegt.

$$\text{Punktprobe: } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus der 1. Zeile folgt $s = 1$.

Aus der 2. Zeile folgt $s = 0,5$.

Dies ist ein Widerspruch, daher liegt A nicht auf der Geraden h .

Die Geraden sind parallel aber nicht identisch.

3.2.2 Ein Punkt P , der von g und h den gleichen Abstand ist, ist der Mittelpunkt der beiden Punkte $A(1|-1|2)$ und $B(2|0|1)$, die jeweils auf den Geraden liegen.

$$\text{Mittelpunkt } P \text{ von } A \text{ und } B: P\left(\frac{1+2}{2} \mid \frac{-1+0}{2} \mid \frac{2+1}{2}\right) \text{ bzw. } P(1,5|-0,5|1,5)$$

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3.1 Die Berechnung (1) ist nicht möglich, da die Matrizen unterschiedliche Formate haben.

Die Berechnung (2) ist möglich. Das Format von $A \cdot B$ ist dann 2×2 .

$$3.2.1 \quad A = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} \quad A^T = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A \cdot A^T &= \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{169} \cdot \begin{pmatrix} 25 + 144 & 60 - 60 \\ 60 - 60 & 144 + 25 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{169} \cdot \begin{pmatrix} 169 & 0 \\ 0 & 169 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist die angegebene Matrix orthogonal.

$$3.2.2 \quad \text{Es gilt} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Somit ist auch} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zu prüfen ist also, ob $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ orthogonal ist.

$$\text{Es ist } A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist die angegebene Matrix orthogonal.

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3.1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xleftarrow{\quad} \text{Addition der Zeilen}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xleftarrow{|\cdot(-4)|} \text{Addition der Zeilen}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right)$$

Aus der 3. Zeile folgt: $-5x_3 = -15 \Leftrightarrow x_3 = 3$ Aus der 2. Zeile folgt: $4x_2 - 3 = -7 \Leftrightarrow x_2 = -1$ Aus der 1. Zeile folgt: $x_1 - 2 - 3 = -4 \Leftrightarrow x_1 = 1$

$$\text{Lösungsvektor } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$3.2.1 \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich $A \cdot B \neq B \cdot A$

$$3.2.2 \quad \text{Matrix } B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ wird geändert zu } \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & a \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 - 3a \\ 2 & -6 + a \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 2 + 2a & -6 + a \end{pmatrix}$$

Die Produkte stimmen überein für $a = 0$.

$$\text{Die gesuchte Matrix lautet } \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$