Hauptprüfung Abiturprüfung 2021 - Leistungsfach

Baden-Württemberg

Wahlteil Analytische Geometrie – Aufgabensatz 1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

August 2021

Aufgabe B1

Gegeben ist eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche.
Die Eckpunkte der Grundfläche sind A(-3|-3|0), B(3|-3|0), C(3|3|0) und D,
die Spitze ist S(0|0|6).
Die Ebene E enthält die Punkte A, B und S.

a) Stellen Sie die Pyramide in einem geeigneten Koordinatensystem dar. (1 VP)
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E. (2 VP)
Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der Pyramide. (2 VP)
(Teilergebnis: E: $2x_2 - x_3 = -6$)

b) Innerhalb der Pyramide gibt es einen Punkt, dessen Abstand von der Grundfläche der Pyramide $\sqrt{5}$-mal so groß ist wie sein Abstand zu den Seitenflächen.
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes. (2,5 VP)

c) Betrachtet wird für jedes a > 0 die gerade Pyramide mit folgenden Eigenschaften:

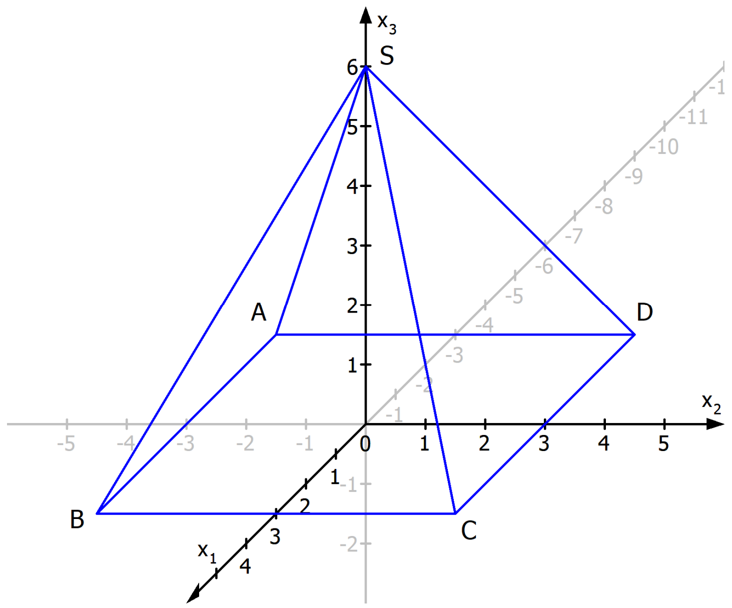
- A(-a|-a|0), B(a|-a|0), C(a|a|0) und D sind die Eckpunkte der quadratischen Grundfläche.
- Die x_3-Koordinate der Spitze S ist positiv.
- Die Höhe der Pyramide stimmt mit der Kantenlänge der Grundfläche überein.

M_1 ist die Kantenmitte von AB, M_2 die Kantenmitte von DS.
Zeigen Sie: Die Strecke $\overline{M_1M_2}$ ist orthogonal zur Kante DS. (2,5 VP)

Lösungen

Aufgabe B1

a) *Stellen Sie die Pyramide in einem geeigneten Koordinatensystem dar.*



Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.

Parameterform der Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Normalenvektor von E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -36 \\ 18 \end{pmatrix}$ bzw- $\vec{n}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ansatz für Koordinatengleichung: $E: 2x_2 - x_3 = d$
Einsetzen des Punktes A(-3|-3|0): $-6 = d$

Koordinatengleichung: $E: 2x_2 - x_3 = -6$

Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der Pyramide.

Die Grundfläche der Pyramide hat einen Inhalt von $G = 6 \cdot 6 = 36$ FE

Flächeninhalt des Seitendreiecks ABS: $A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h$

Da das Dreieck ABS gleichschenklig ist, ist die Höhe h der Abstand der Spitze S zum Mittelpunkt M der Strecke AB mit M(0|-3|0).

$h = \left|\overrightarrow{SM}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{45}$ $\qquad A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{45} = 3 \cdot \sqrt{45} = 9 \cdot \sqrt{5}$

Oberfläche: $O = 36 + 4 \cdot 9 \cdot \sqrt{5} \approx 116{,}5\,\text{FE}$

b) Der gesuchte Punkt liegt auf der x_3 -Achse und besitzt die Koordinaten P(0|0|a), wobei 0 < a < 6 ist.
Der Abstand von P zur Grundfläche ist a.

Abstand von P zur Seitenfläche ABS, also zur Ebene E:

HNF von E: $\frac{2x_2 - x_3 + 6}{\sqrt{5}} = 0$

$d(P,E) = \frac{|-a+6|}{\sqrt{5}}$

Bedingung: $\sqrt{5} \cdot \frac{|-a+6|}{\sqrt{5}} = a \quad \Leftrightarrow a = |-a+6| \quad \Leftrightarrow a = -a+6 \Leftrightarrow a = 3$

(Da 0 < a < 6 ist kann der Betrag auch weggelassen werden)

Der gesuchte Punkt hat die Koordinaten P(0|0|3).

c) Die Koordinaten des Eckpunktes D sind D(-a|a|0).
Die Höhe der Pyramide ist 2a, also hat die Spitze S die Koordinaten S(0|0|2a).

M_1 ist die Mitte von AB, also $M_1(0\,|\,-a\,|\,0)$.
M_2 ist die Mitte von DS, also $M_2(-0{,}5a\,|\,0{,}5a\,|\,a)$

Wenn M_1M_2 orthogonal ist zur Kante DS, muss gelten: $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{DS} = 0$

Es gilt: $\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} -0{,}5a \\ 1{,}5a \\ a \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 2a \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} -0{,}5a \\ 1{,}5a \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 2a \end{pmatrix} = -0{,}5a^2 - 1{,}5a^2 + 2a^2 = 0$ was zu zeigen war.