Hauptprüfung Fachhochschulreife 2021

Baden-Württemberg

Wahlteil: Aufgabe 4 Analysis

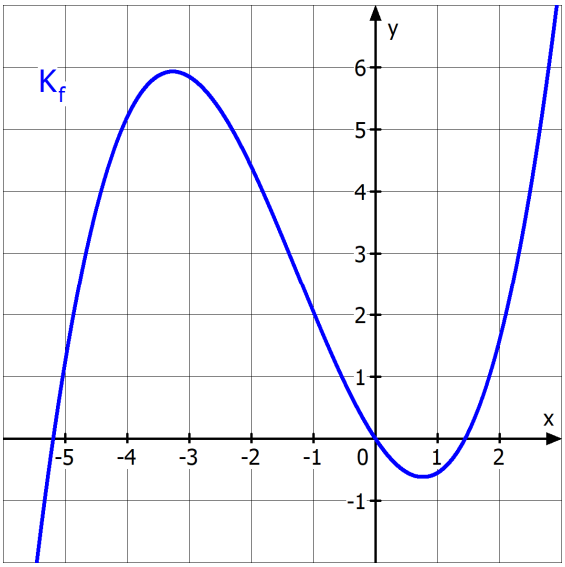
Hilfsmittel: Merkhilfe und WTR

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{5}x^3+\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x$, $x\in\mathbb{R}$ und ihr Schaubild K_f.



4.1 Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an K_f im Punkt P(0|f(0)).
Im Punkt B auf K_f besitzt die Tangente dieselbe Steigung wie in P.
Bestimmen Sie die Koordinaten von B. (7 Punkte)

4.2 Die Gerade x = u schneidet K_f für $-5\le u\le 0$ im Punkt Q und die x-Achse im Punkt R. Der Koordinatenursprung O bildet mit den Punkten Q und R ein Dreieck.
Zeichnen Sie in das obige Schaubild das Dreieck OQR für u = -4 ein.
Berechnen Sie, für welchen Wert von u der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird und geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.
(8 Punkte)

4.3 Begründen Sie, dass das Schaubild jeder Stammfunktion von f an der Stelle x = 0 einen Hochpunkt hat.
Geben Sie die Stammfunktion an, deren Schaubild den Hochpunkt in H(0|-3) hat.
(4 Punkte)

Die Funktion g ist für $-2\le x\le 6$ gegeben durch $g(x)=-1{,}5\sin(x)-2$.
Ihr Schaubild ist K_g.

4.4 Bestimmen Sie die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte von K_g.
Zeichnen Sie K_g.
(7 Punkte)

4.5 Die Parabel $y=-x^2+\pi x-2$ umschließt mit K_g im Intervall $[0;\pi]$ eine Fläche.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.
(4 Punkte)

Lösung

4.1 $f(x)=\frac{1}{5}x^3+\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x$

Es gilt $f'(x)=\frac{3}{5}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$

Ansatz für die Tangentengleichung: $y=mx+b$

Steigung der Tangente: $f'(0)=-\frac{3}{2}=m$

y-Wert des Berührpunktes: $f(0)=0$ also P(0|0)

Einsetzen der Steigung und des Punktes in die Tangentengleichung:

$0=-\frac{3}{2}\cdot 0+b \Leftrightarrow b=0$

Tangentengleichung: $y=-\frac{3}{2}x$

Bedingung für Punkt B: $f'(x)=-\frac{3}{2}$

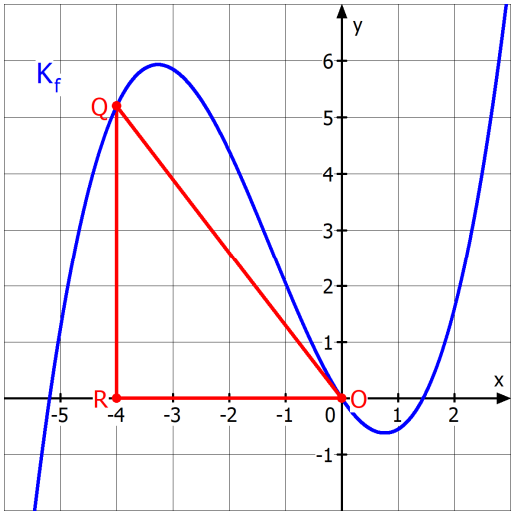
$\frac{3}{5}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{5}x^2+\frac{3}{2}x=0 \quad \Leftrightarrow x\cdot\left(\frac{3}{5}x+\frac{3}{2}\right)=0$ Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): x = 0

Gleichung II): $\frac{3}{5}x+\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow x=-2{,}5$

Die Lösung x = 0 kommt nicht in Betracht, da diese zum Punkt P gehört.
Der gesuchte Punkt B hat den x-Wert -2,5.
y-Wert von B: $f(-2{,}5)=5{,}3125$
Koordinaten von B: B(-2,5|5,3125)

4.2 Zeichnung:



Koordinaten der Punkte für u = -4: Q(-4|5,2) und R(-4|0) und O(0|0)

Allgemeine Eckpunkte des Dreiecks: Q(u|f(u)), R(u|0) und O(0|0)

Flächeninhalt des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{OR} \cdot \overline{QR}$

Es gilt $\overline{OR} = 0 - u = -u$ und $\overline{QR} = f(u) - 0 = f(u)$.

Zielfunktion: $A(u) = \frac{1}{2} \cdot (-u) \cdot f(u) = -\frac{1}{2}u \cdot \left(\frac{1}{5}u^3 + \frac{3}{4}u^2 - \frac{3}{2}u \right)$

$$A(u) = -\frac{1}{10}u^4 - \frac{3}{8}u^3 + \frac{3}{4}u^2 \text{ mit } -5 \le u \le 0$$

Es gilt $A'(u) = -\frac{2}{5}u^3 - \frac{9}{8}u^2 + \frac{3}{2}u$ und $A''(u) = -\frac{6}{5}u^2 - \frac{9}{4}u + \frac{3}{2}$

Gesucht ist das Maximum der Zielfunktion.
Bedingung: $A'(u) = 0$ und $A''(u) \neq 0$

$-\frac{2}{5}u^3 - \frac{9}{8}u^2 + \frac{3}{2}u = 0 \quad \Leftrightarrow u \cdot \left(-\frac{2}{5}u^2 - \frac{9}{8}u + \frac{3}{2} \right) = 0$ Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): $u_1 = 0$

Gleichung II): $-\frac{2}{5}u^2 - \frac{9}{8}u + \frac{3}{2} = 0$ abc-Formel:

$$u_{2,3} = \frac{9/8 \pm \sqrt{(9/8)^2 + 2{,}4}}{-0{,}8} \approx \frac{1{,}125 \pm 1{,}915}{-0{,}8} \qquad u_2 = -3{,}8 \qquad u_3 = 0{,}99$$

$u_3 = 0{,}99$ liegt außerhalb des Intervalls $-5 \le u \le 0$

$A''(0) > 0$ also Minimum
$A''(-3{,}8) \approx -7{,}3 < 0$ also Maximum

Es gilt $A(-3{,}8) \approx 10{,}56$

Randwerte:
Für u = 0 gilt A(0) = 0 < 10,56
Für u = -5 gilt A(-5) = 3,125 < 10,56

Der Flächeninhalt des Dreiecks wird maximal für u = -3,8.
Der maximale Flächeninhalt beträgt ca. A = 10,56.

4.3 Die Ableitungsfunktion f von F besitzt an der Stelle x = 0 eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel.
Daher besitzt das Schaubild von jeder Stammfunktion F an der Stelle x = 0 einen Hochpunkt.

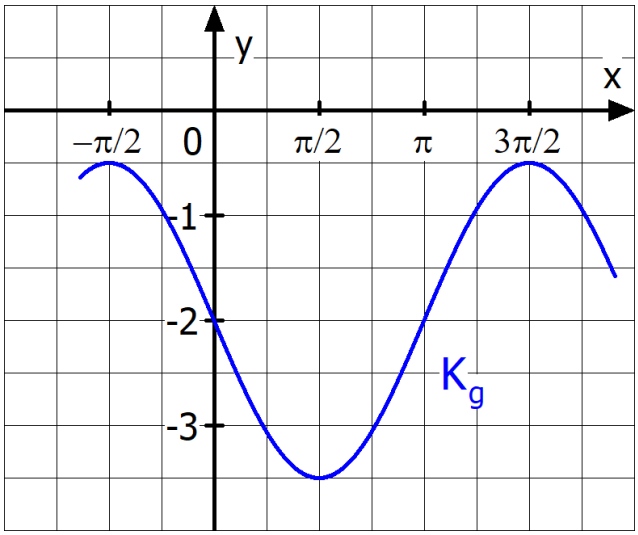
Allgemeine Stammfunktion von f: $F(x)=\frac{1}{20}x^4+\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+C$

Es gilt F(0) = 3.
Daraus folgt $F(0)=C=-3$.

Die gesuchte Stammfunktion lautet $F(x)=\frac{1}{20}x^4+\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2-3$.

4.4 Zeichnung von $g(x)=-1{,}5\sin(x)-2$

Höhe der Mittellinie: -2
Amplitude: 1,5
Periode: $p=2\pi$
Auf der y-Achse besitzt das Schaubild von g einen Wendepunkt mit negativer Steigung.



Aus dem Schaubild kann nun abgelesen werden:

Hochpunkte: $H_1(-\frac{\pi}{2}\,|\,-0{,}5)$ und $H_2(\frac{3\pi}{2}\,|\,-0{,}5)$

Tiefpunkt: $T(\frac{\pi}{2}\,|\,-3{,}5)$

Wendepunkte: $W_1(0\,|\,-2)$ und $W_2(\pi\,|\,-2)$

4.5 Berechnung der Fläche mit einem Integral:

$$\int_0^{\pi}\left(-x^2+\pi\cdot x-2-\left(-1{,}5\sin(x)-2\right)\right)dx=\int_0^{\pi}\left(-x^2+\pi\cdot x+1{,}5\sin(x)\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{\pi}{2}x^2-1{,}5\cos(x)\right]_0^{\pi}=-\frac{1}{3}\pi^3+\frac{1}{2}\pi^3+1{,}5-(-1{,}5)\approx 8{,}17$$