

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2021

Baden-Württemberg

Wahlteil: Aufgabe 3 Analysis

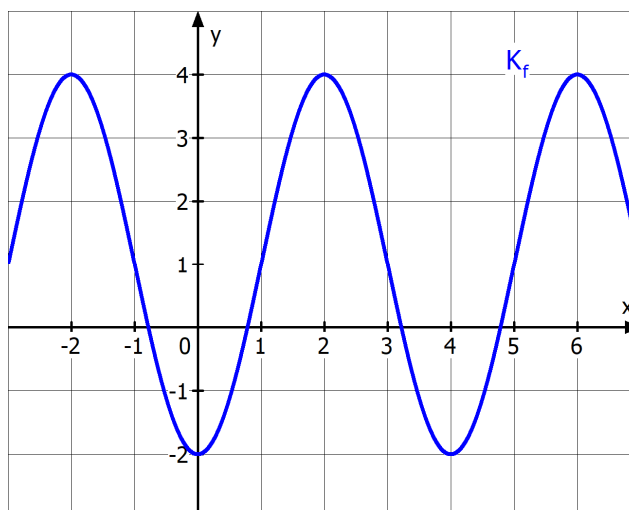
Hilfsmittel: Merkhilfe und WTR

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Die Abbildung zeigt das Schaubild K_f der Funktion f mit $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot x) + d$, $x \in \mathbb{R}$.



- 3.1 Bestimmen Sie die Koeffizienten a , b und d . (4 Punkte)
- 3.2 Das Schaubild K_f wird zuerst mit Faktor 1,5 in x -Richtung gestreckt und dann um 1 Längeneinheit nach oben verschoben. Das neue Schaubild heißt K_g . Geben Sie die Koordinaten der Extrempunkte von K_g im Intervall $[0;4]$ an. Bestimmen Sie die Periode von g nach der Streckung in x -Richtung. (4 Punkte)

Die Temperatur (in $^{\circ}\text{C}$) einer Felswand wird beschrieben durch die Funktion T mit

$$T(t) = -7 \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 14, \quad t \in [0; 24].$$

Dabei ist t die Zeit (in Stunden) und $t = 0$ entspricht der Zeit 5:00 Uhr.

- 3.3 Bestimmen Sie die Uhrzeiten, zu denen der Fels am wärmsten bzw. am kältesten ist und ermitteln Sie die zugehörigen Temperaturen. Zu welchen Zeitpunkten ändert sich die Temperatur am schnellsten und welchen Wert nimmt sie dann an? (6 Punkte)
- 3.4 In welchem Zeitraum liegt die Temperatur oberhalb von $17,5^{\circ}\text{C}$? (2 Punkte)

Die Funktion h ist gegeben durch $h(x) = \frac{1}{2}x + 3 - e^{0,5x}$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild heißt K_h .

- 3.5 Geben Sie die Gleichung der Asymptote von K_h an. Untersuchen Sie K_h auf Extrempunkte. Zeichnen Sie K_h für $-8 \leq x \leq 4$. (10 Punkte)
- 3.6 Zeigen Sie, dass die Steigung von K_h in allen Punkten kleiner als 0,5 ist. (4 Punkte)

Lösung

3.1 Höhe der Mittellinie: $d = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = \frac{4 + (-2)}{2} = 1$

Amplitude: $\frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{4 - (-2)}{2} = 3$

Da das Schaubild auf der y-Achse einen Tiefpunkt besitzt, ist $a < 0$.
Somit gilt $a = -3$.

Die Periode der Funktion ist $p = 4$. Daraus folgt $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = -3\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1$.

- 3.2 Zur Berechnung der Extrempunkte des Schaubildes K_g wird geprüft, wie sich die Extrempunkte von K_f durch die Streckung und Verschiebung verändern.

Tiefpunkt von K_f : $T(0|-2)$

Streckung in x-Richtung mit Faktor 1,5 und Verschiebung um 1 nach oben ergibt $T^*(0 \cdot 1,5 | -2 + 1)$ und damit $T^*(0|-1)$.

Hochpunkt von K_f : $H(2|4)$

Streckung in x-Richtung mit Faktor 1,5 und Verschiebung um 1 nach oben ergibt $H^*(2 \cdot 1,5 | 4 + 1)$ und damit $H^*(3|5)$.

Periode der Funktion g : $p_{\text{neu}} = p_{\text{alt}} \cdot 1,5 = 4 \cdot 1,5 = 6$.

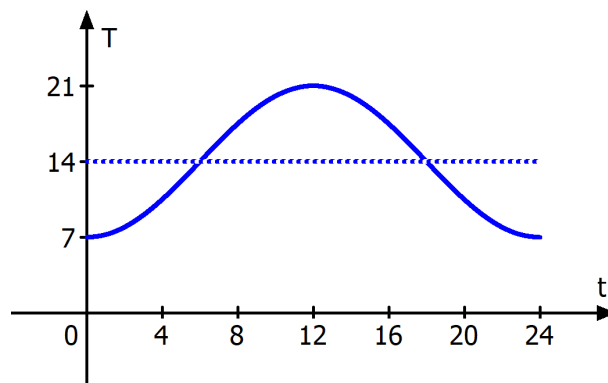
- 3.3 Die Berechnung erfolgt am einfachsten mithilfe einer Skizze des Schaubildes von T .

Höhe der Mittellinie: 14

Amplitude: 7

Periode: $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24$

Auf der y-Achse befindet sich ein Tiefpunkt.



Der Fels ist am wärmsten für $t = 12$, also um 17 Uhr.
Die höchste Temperatur beträgt 21°C .

Der Fels ist am kältesten für $t = 0$ und $t = 24$, also um 5 Uhr.
Die tiefste Temperatur beträgt 7°C .

An den Wendestellen, also bei $t = 6$ und $t = 18$ (um 11 Uhr und 23 Uhr) ändert sich die Temperatur am schnellsten.
Die Wendestellen liegen bei einer allgemeinen Kosinusfunktion auf der Höhe der Mittellinie.
Die Temperatur an den Wendestellen beträgt 14°C .

- 3.4 Berechnung der Zeitpunkte, bei denen die Temperatur $17,5^\circ\text{C}$ beträgt:
 $T(t) = 17,5$

$$-7 \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 14 = 17,5 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12} t\right) = -0,5 \quad \text{Substitution: } u = \frac{\pi}{12} t$$

$$\cos(u) = -0,5$$

$$\text{WTR: } u_1 = \frac{2}{3} \pi$$

$$\text{Weitere Lösung: } u_2 = 2\pi - u_1 = \frac{4}{3} \pi$$

$$\text{Rücksubstitution: } \frac{\pi}{12} t = \frac{2}{3} \pi \Leftrightarrow t = 8 \quad (\text{entspricht 13 Uhr})$$

$$\frac{\pi}{12} t = \frac{4}{3} \pi \Leftrightarrow t = 16 \quad (\text{entspricht 21 Uhr})$$

Mit Hilfe der Skizze aus 3.3 kann man erkennen, dass das Schaubild zwischen 13 Uhr und 21 Uhr oberhalb von $17,5^\circ\text{C}$ liegt.

3.5 $h(x) = \frac{1}{2}x + 3 - e^{0,5x}$

Das Schaubild von h hat eine schiefe Asymptote $y = \frac{1}{2}x + 3$ für $x \rightarrow -\infty$.

$$\text{Es gilt } h'(x) = \frac{1}{2} - 0,5e^{0,5x} \text{ und } h''(x) = -0,25e^{0,5x}.$$

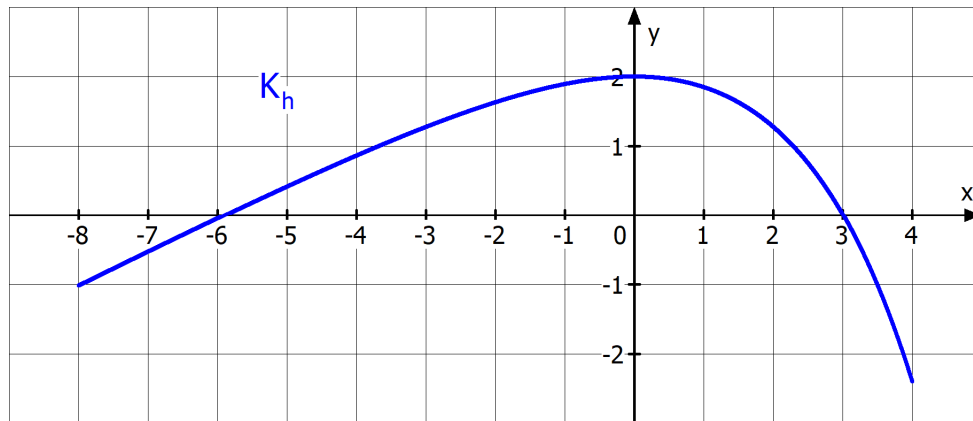
Bedingung für Extrempunkte: $h'(x) = 0$ und $h''(x) \neq 0$

$$\frac{1}{2} - 0,5e^{0,5x} = 0 \Leftrightarrow e^{0,5x} = 1 \Leftrightarrow 0,5x = \ln(1) \Leftrightarrow x = 0$$

$$h''(0) = -0,25 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } x = 0$$

Wegen $h(0) = 2$ existiert der Hochpunkt $H(0|2)$.

Zeichnung:



3.6 Es gilt $h'(x) = \frac{1}{2} - 0,5e^{0,5x}$

Es ist $0,5e^{0,5x} > 0$.

Somit gilt für die Ableitung $h'(x) = \frac{1}{2} - 0,5e^{0,5x} < \frac{1}{2}$.

Somit ist die Steigung einer Tangente an das Schaubild von h immer kleiner als 0,5.