

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2021

Baden-Württemberg

Wahlteil: Aufgabe 2 Analysis

Hilfsmittel: Merkhilfe und WTR

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 27$, $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild heißt K_f .

- 2.1 Zeigen Sie, dass f bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$ Nullstellen hat.
Untersuchen Sie K_f auf Extrem- und Wendepunkte.
Zeichnen Sie K_f für $-1,25 \leq x \leq 4$. (12 Punkte)
- 2.2 Prüfen Sie, ob die y -Achse den Inhalt der Fläche zwischen K_f und der x -Achse im Verhältnis 1:2 teilt. (5 Punkte)
- 2.3 Von einem zur y -Achse symmetrischen Schaubild einer ganzrationalen Funktion vierten Grades kennt man einen Hochpunkt $H(2|9)$ und eine Nullstelle bei $x = -1$.
Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, mit dessen Hilfe man einen passenden Funktionsterm bestimmen könnte. (4 Punkte)

Eine blaue Flüssigkeit wird in einem Labor bei einem Versuch erhitzt. Die Temperatur T der Flüssigkeit in Grad Celsius ($^{\circ}\text{C}$) wird durch die Funktion

$T(t) = 105 - 83e^{-0,15t}$, $t \geq 0$ beschrieben, dabei ist t die Zeit in Minuten.

Diese Temperatur wird von einem Thermometer fortlaufend überwacht.

- 2.4 Geben Sie den Messbereich an, den das Thermometer für diesen Versuch mindestens erfassen können muss. (2 Punkte)
- 2.5 Zeigen Sie, dass die momentane Änderungsrate der Temperatur zum Zeitpunkt $t = 5$ kleiner ist als die durchschnittliche Änderungsrate der Temperatur in den ersten fünf Minuten. (4 Punkte)
- 2.6 Bei einer Temperatur von 92°C schlägt die Farbe der Flüssigkeit in grün um. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem dies passiert. (3 Punkte)

Lösung

2.1 $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 27$

Nachweis der Nullstelle $x = -1$: $f(-1) = -(-1)^4 + 8 \cdot (-1)^3 - 18 \cdot (-1)^2 + 27 = 0$

Nachweis der Nullstelle $x = 3$: $f(3) = -3^4 + 8 \cdot 3^3 - 18 \cdot 3^2 + 27 = 0$

Ableitungsfunktionen:

$$f'(x) = -4x^3 + 24x^2 - 36x$$

$$f''(x) = -12x^2 + 48x - 36$$

$$f'''(x) = -24x + 48$$

Extrempunkte:

Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$$-4x^3 + 24x^2 - 36x = 0 \Leftrightarrow 4x \cdot (-x^2 + 6x - 9) = 0 \quad \text{Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Gleichung II): $-x^2 + 6x - 9 = 0$ abc-Formel: $x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{-2} = 3$

$$f''(0) = -36 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } x = 0$$

Wegen $f(0) = 27$ lautet der Hochpunkt $H(0|27)$

$$f''(3) = 0 \Rightarrow \text{keine Aussage möglich, was bei } x = 3 \text{ vorliegt}$$

Kontrolle mit Vorzeichenwechsel der Ableitungsfunktion f' bei $x = 3$:

$$f'(2) = -8 < 0 \quad \text{und} \quad f'(4) = -16 < 0$$

Die Ableitungsfunktion besitzt keinen Vorzeichenwechsel, somit existiert bei $x = 3$ einen Sattelpunkt (und daher keinen Extrempunkt).

Wendepunkte:

Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$-12x^2 + 48x - 36 = 0 \quad | : 12$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \quad \text{abc-Formel: } x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{-2} = \frac{-4 \pm 2}{-2}$$

$$x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = 3$$

$$f'''(1) = 24 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x = 1$$

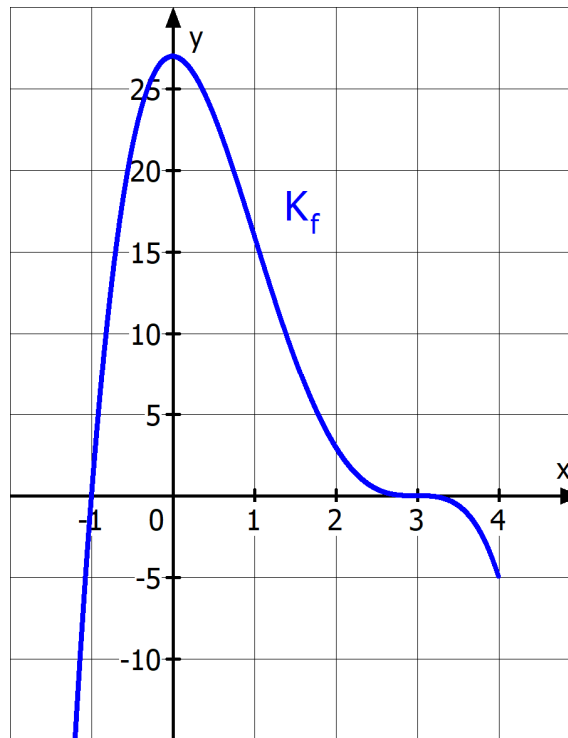
$$f'''(3) = -24 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x = 3$$

Es gilt $f(1) = 16$ und $f(3) = 0$.

Das Schaubild von f besitzt zwei Wendepunkte: $W_1(1|16)$ und $W_2(3|0)$.

W_2 entspricht dem Sattelpunkt aus der Extrempunktberechnung.

Zeichnung:



2.2 Flächeninhalt links von der y-Achse:

$$A_1 = \int_{-1}^0 f(x) dx = \left[-\frac{1}{5}x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 27x \right]_{-1}^0 = 0 - \left(-\frac{1}{5} + 2 - 6 + 27 \right) = 18,8$$

Flächeninhalt rechts von der y-Achse:

$$A_2 = \int_0^3 f(x) dx = \left[-\frac{1}{5}x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 27x \right]_0^3 = -48,6 + 162 - 162 + 81 - 0 = 32,4$$

Das Flächenverhältnis ist $A_1 : A_2 = 18,8 : 32,4 \neq 1 : 2$.

2.3 Ansatz für die Funktion: $g(x) = ax^4 + bx^2 + c$

In dem Term tauchen nur gerade Hochzahlen auf, da das Schaubild symmetrisch zur y-Achse ist.

Es gilt $g'(x) = 4ax^3 + 2bx$

Bedingungen:

1.) Nullstelle bei $x = -1$: $g(-1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$

2.) Punkt $P(2|9)$: $g(2) = 9 \Rightarrow 16a + 4b + c = 9$

3.) Hochpunkt bei $x = 2$: $g'(2) = 0 \Rightarrow 32a + 4b = 0$

2.4 $T(t) = 105 - 83e^{-0,15t}$

Es handelt sich um ein beschränktes Wachstum.

Mit Hilfe der Wertetabelle des WTR kann man überprüfen, dass die Funktion monoton wächst.

Kleinste Temperatur für $t = 0$: $T(0) = 105 - 83 = 22$

Das Schaubild von T besitzt die waagrechte Asymptote $y = 105$ für $t \rightarrow +\infty$.

Der Messbereich muss mindestens von 22°C bis 105°C gehen.

2.5 Es gilt $T'(t) = -83 \cdot (-0,15) \cdot e^{-0,15t} = 12,45 \cdot e^{-0,15t}$.

Momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt $t = 5$: $T'(5) \approx 5,88$ °C pro Minute

Durchschnittliche Änderungsrate in den ersten 5 Minuten:

$$\frac{T(5) - T(0)}{5 - 0} \approx \frac{65,79 - 22}{5} \approx 8,76 \text{ °C pro Minute}$$

Die momentane Änderungsrate ist somit kleiner als die durchschnittliche Änderungsrate, was zu zeigen war.

2.6 Bedingung: $T(t) = 92$

$$\begin{aligned} 105 - 83e^{-0,15t} &= 92 &\Leftrightarrow -83e^{-0,15t} &= -13 &\Leftrightarrow e^{-0,15t} &\approx 0,1566 \\ &&\Leftrightarrow t &\approx 12,36 \end{aligned}$$

Nach etwa 12,36 Minuten wird die Temperatur von 92°C erreicht.