

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2021

Baden-Württemberg

Pflichtteil Variante 1

Hilfsmittel: keine

Berufskolleg

Alexander Schwarz

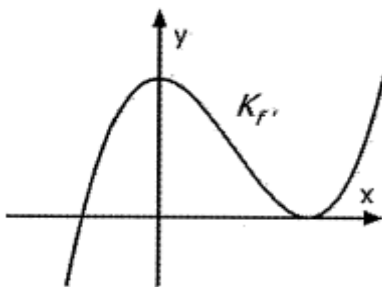
www.mathe-aufgaben.com

Aufgabe 1:

1.1 Lösen Sie die Gleichung $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$, $x \in \mathbb{R}$ (5 Punkte)

1.2 Das Schaubild einer Polynomfunktion dritten Grades berührt die x-Achse an der Stelle $x = -1$ und schneidet beide Koordinatenachsen jeweils bei 4. Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm. (4 Punkte)

1.3 Gegeben ist der Ausschnitt aus dem Schaubild einer Ableitungsfunktion f' . Entscheiden und begründen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.



a) Das Schaubild der zugehörigen Funktion f besitzt einen Hochpunkt.

b) Das Schaubild der zugehörigen Funktion f ist rechts gekrümmt für $x \leq 0$.

c) $f'(0) > 0$

(6 Punkte)

1.4 Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{4}x^3 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von g im Punkt $P(2|g(2))$.

(4 Punkte)

1.5 Zeigen Sie, dass das Schaubild der Funktion h mit $h(x) = e^x - x$, $x \in \mathbb{R}$ für $x < 0$ fällt.

(3 Punkte)

1.6 Berechnen Sie $\int_0^{\ln(4)} (e^x - 1) dx$. (4 Punkte)

1.7 Gegeben sind zwei Schaubilder mit den Gleichungen

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x \quad \text{und} \quad y = -\sin(b \cdot x) + x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Der Parameter b kann den Wert 1 oder 2 annehmen.

Ermitteln Sie, welchen der beiden Werte b annehmen muss, damit sich beide Schaubilder im Ursprung berühren.

(4 Punkte)

Lösung

1.1 $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ Substitution: $x^2 = u$

$$u^2 - 2u - 8 = 0 \quad \text{abc-Formel: } u_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \quad u_1 = 4 \quad u_2 = -2$$

Rücksubstitution: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$x^2 = -2$ Gleichung ist nicht lösbar

- 1.2 Die Polynomfunktion besitzt eine doppelte Nullstelle bei $x = -1$, da das Schaubild von die x-Achse bei $x = -1$ berührt.

Die Polynomfunktion besitzt eine einfache Nullstelle bei $x = 4$.

Ansatz: $f(x) = a \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 4)$

Das Schaubild verläuft durch den Punkt $P(0|4)$.

Einsetzen der Koordinaten von P: $f(0) = 4 \Rightarrow a \cdot (0 + 1)^2 \cdot (0 - 4) = 4 \Leftrightarrow a = -1$

Möglicher Funktionsterm: $f(x) = -1 \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 4)$

- 1.3 a) Die Aussage ist falsch. Wenn das Schaubild von f einen Hochpunkt besitzen würde, müsste die dargestellte Ableitungsfunktion eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ existieren.
- b) Die Aussage ist falsch. Wenn das Schaubild von f für $x \leq 0$ rechts gekrümmt wäre, müsste $f''(x) < 0$ für $x \leq 0$ sein.
Das Schaubild der Ableitungsfunktion hat für $x \leq 0$ positive Tangentensteigungen, das heißt es gilt $f''(x) > 0$.
- c) Die Aussage ist wahr, da das Schaubild der Ableitungsfunktion an der Stelle $x = 0$ einen positiven y-Wert besitzt (das Schaubild der Ableitungsfunktion liegt an der Stelle $x = 0$ oberhalb der x-Achse).

1.4 $g(x) = \frac{1}{4}x^3 + x + 1$

Es gilt $g'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 1$.

Ansatz für die Tangentengleichung: $y = mx + b$

Steigung der Tangente an der Stelle $x = 2$: $g'(2) = \frac{3}{4} \cdot 4 + 1 = 4$

Berechnung des y-Wertes von P: $f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^3 + 2 + 1 = 5$

Koordinaten von P: $P(2|5)$

Einsetzen des Punktes und der Steigung in die Tangentengleichung:

$5 = 4 \cdot 2 + b \Leftrightarrow b = -3$

Gleichung der Tangente: $y = 4x - 3$

- 1.5 Es ist zu zeigen, dass die Funktion h für $x < 0$ monoton fallend ist.
Dies ist gültig, wenn $h'(x) < 0$ ist.

Mit $h(x) = e^x - x$ folgt $h'(x) = e^x - 1$.

Für $x < 0$ ist $e^x < 1$.

Daraus ergibt sich $h'(x) = e^x - 1 < 0$ für $x < 0$, was zu zeigen war.

1.6
$$\int_0^{\ln(4)} (e^x - 1) dx = [e^x - x]_0^{\ln(4)} = e^{\ln(4)} - \ln(4) - (1 - 0) = 4 - \ln(4) - 1 = 3 - \ln(4)$$

- 1.7 Die gegebenen Funktionen werden bezeichnet mit

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x \text{ und } g(x) = -\sin(b \cdot x) + x$$

Es gilt $f'(x) = x - 1$ und $g'(x) = -b \cdot \cos(b \cdot x) + 1$.

Bedingung für eine Berührung im Ursprung: $f(0) = g(0)$ und $f'(0) = g'(0)$

Es gilt $f(0) = 0$ und $g(0) = -\sin(0) + 0 = 0$.

Somit gilt $f(0) = g(0) = 0$ unabhängig davon welchen Wert b annimmt.

Es gilt $f'(0) = -1$ und $g'(0) = -b \cdot \cos(0) + 1 = -b + 1$.

Bedingung: $-1 = -b + 1 \Leftrightarrow b = 2$

Für $b = 2$ berühren sich die Schaubilder im Ursprung.