

Aufgabe 1: (abgewandelte Abituraufgabe 2004)

a) *Benachbarte Seitenflächen bilden einen stumpfen Winkel. Wie groß ist dieser?*

Um den Winkel zwischen zwei Seitenflächen zu ermitteln, werden zunächst die Koordinaten der vorhandenen Punkte benötigt.

Der Punkt auf der Grundfläche links hinten sei der Ursprung $O(0|0|0)$.

Dann ergibt sich $P(2|0|0)$, $Q(2|2|0)$ und $S(1|1|2)$.

$$\text{Ebenengleichung durch PQS: } E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenvektor von E: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ bzw. gekürzt } \vec{n}^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ebenengleichung durch OPS: } H: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenvektor von H: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ bzw. gekürzt } \vec{n}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Winkel zwischen den Ebenen:

$$\cos \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \alpha = 78,5^\circ$$

Da der stumpfe Winkel ($>90^\circ$) gesucht ist, ist der gesuchte Winkel
 $\beta = 180^\circ - 78,5^\circ = 101,5^\circ$.

b) *Wie viel Prozent der Vorderfläche beansprucht die Einstiegsöffnung?*

Die Vorderfläche PQS ist ein gleichschenkliges Dreieck.

Der Mittelpunkt M der Grundseite PQ besitzt die Koordinaten $M(2|1|0)$.

$$\text{Flächeninhalt des Dreiecks PQS: } A = \frac{1}{2} \cdot \overline{PQ} \cdot \overline{MS} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |\overline{MS}| = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} = \sqrt{5} \text{ FE}$$

Flächeninhalt des Trapezes ABCD:

Eckpunkte A(2|0,5|0), B(2|1,5|0), C(1,5|1,25|1), D(1,5|0,75|1)

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot h_{\text{Trapez}} = \frac{1 + 0,5}{2} \cdot h_{\text{Trapez}}$$

Die Trapezhöhe entspricht der Strecke vom Mittelpunkt M(2|1|0) der Strecke $\overline{AB}$ zum Mittelpunkt M*(1,5|1|1) der Strecke $\overline{CD}$.

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{1,5}{2} \cdot |\overline{MM^*}| = 0,75 \cdot \left| \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 0,75 \cdot \sqrt{1,25} \approx 0,839 \text{ m}^2$$

$$\text{Prozentualer Anteil} = \frac{A_{\text{Trapez}}}{A_{\text{DreieckPQS}}} = \frac{0,75 \cdot \sqrt{1,25}}{\sqrt{5}} = 0,375 = 37,5\%$$

- c) *Berechne die Länge der Strecke C*D*, wenn sich die Lampe 25cm unter der Zeltspitze befindet.*

Die Lampe hängt im Punkt L(1|1|1,75) – also 0,25 m unterhalb der Spitze S. Der Punkt C* ist der Schnittpunkt der Gerade durch L und C mit der $x_1 - x_2$ - Ebene.

Koordinatengleichung der $x_1 - x_2$ - Ebene: $x_3 = 0$

$$\text{Gerade durch LC: } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1,75 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ -0,75 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnitt mit der } x_1 - x_2 \text{ - Ebene: } 1,75 - 0,75 \cdot r = 0 \Leftrightarrow r = \frac{7}{3} \Rightarrow C^* \left(\frac{13}{6} \mid \frac{19}{12} \mid 0 \right)$$

Der Punkt D* ist der Schnittpunkt der Gerade durch L und D mit der $x_1 - x_2$ - Ebene.

$$\text{Gerade durch LD: } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1,75 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,25 \\ -0,75 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnitt mit } x_3 = 0: 1,75 - 0,75 \cdot r = 0 \Leftrightarrow r = \frac{7}{3} \Rightarrow D^* \left(\frac{13}{6} \mid \frac{5}{12} \mid 0 \right)$$

$$\text{Für die gesuchte Strecke ergibt sich } \overline{C^*D^*} = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{14}{12} \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{7}{6} \text{ m}$$

Aufgabe 2: (abgewandelte Abituraufgabe 2004)

a) *Beschreibe die Lage der Ebene E_3 .*

$$E_3 : 3x_1 - x_3 = 0$$

In der Ebenengleichung fehlt die Variable x_2 .

Das heißt, dass die Ebene E_3 parallel zur x_2 -Achse ist.

Da der Ursprung $O(0|0|0)$ auf E_3 liegt, liegt die x_2 -Achse in der Ebene.

Bestimme seine Koordinaten.

Geradengleichung von g_a durch A und senkrecht zu E_a :

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{Richtungsvektor von } g = \text{Normalenvektor der Ebene})$$

Schnittpunkt der Gerade und der Ebene:

$$a \cdot (10 + a \cdot t) - (-t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 10a + a^2 t + t = 0$$

$$\Leftrightarrow t \cdot (a^2 + 1) = -10a$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-10a}{a^2 + 1}$$

Einsetzen von t in die Geradengleichung:

$$x_1 = 10 - \frac{10a^2}{a^2 + 1} = \frac{10(a^2 + 1) - 10a^2}{a^2 + 1} = \frac{10}{a^2 + 1}$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = \frac{10a}{a^2 + 1}$$

$$\text{Schnittpunkt: } D_a \left(\frac{10}{a^2 + 1} \mid 0 \mid \frac{10a}{a^2 + 1} \right)$$

b) Zeige, dass das Dreieck ABD_a für jedes $a > 0$ rechtwinklig ist.

Zunächst werden die Dreiecksseiten als Vektoren dargestellt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BD_a} = \begin{pmatrix} \frac{10}{a^2+1} \\ -10 \\ \frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD_a} = \begin{pmatrix} \frac{10}{a^2+1} - 10 \\ 0 \\ \frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-10a^2}{a^2+1} \\ 0 \\ \frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix}$$

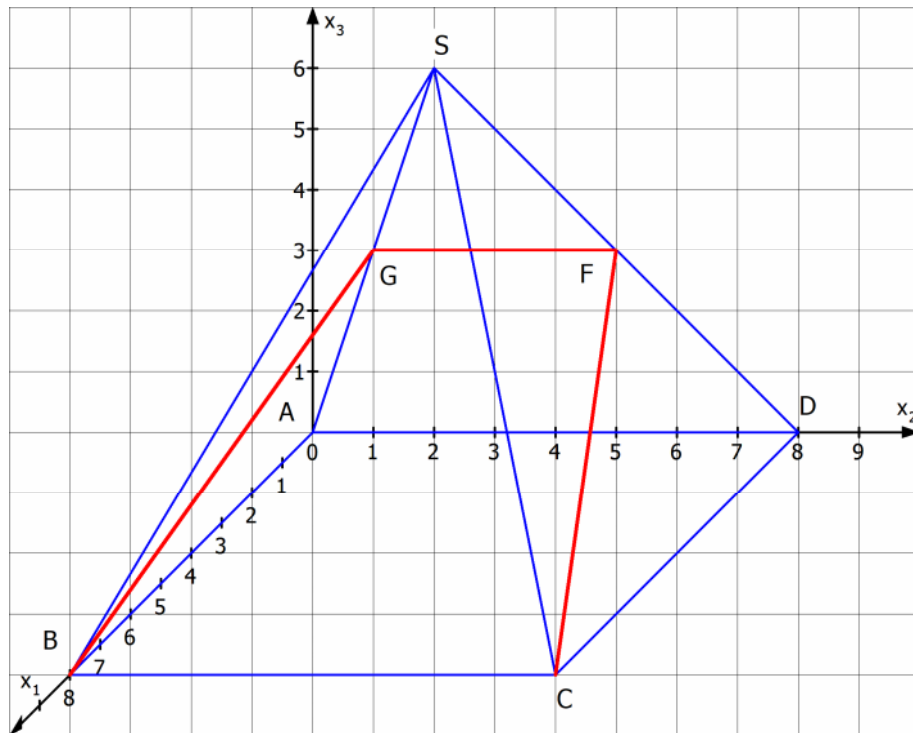
Prüfung der Rechtwinkligkeit des Dreiecks im Punkt D_a :

$$\overrightarrow{BD_a} \cdot \overrightarrow{AD_a} = \frac{10}{a^2+1} \cdot \frac{-10a^2}{a^2+1} + 0 + \frac{10a}{a^2+1} \cdot \frac{10a}{a^2+1} = 0 \text{ unabhängig von } a.$$

Damit ist die Rechtwinkligkeit für jedes $a > 0$ bewiesen.

Aufgabe 3: (abgewandelte Abituraufgabe 2005)

- a) Stelle die Pyramide in einem Koordinatensystem dar.
Zeichne das Viereck BCFG ein.



Gib die Koordinaten der Punkte F und G an.

Gleichung der Ebene E_2 : $2x_1 + 3x_3 = 16$

Berechnung des Schnittpunktes F:

Geradengleichung durch D und S: $g_{DS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Schnitt von E_2 mit g_{DS} : $2 \cdot 4t + 3 \cdot 8t = 16 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

Daraus ergibt sich als Schnittpunkt F(2|6|4).

Berechnung des Schnittpunktes G:

Geradengleichung durch A und S: $g_{AS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Schnitt von E_2 mit g_{AS} : $2 \cdot 4t + 3 \cdot 8t = 16 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

Daraus ergibt sich als Schnittpunkt G(2|2|4).

Zeige, dass das Viereck ein gleichschenkliges Trapez ist.

Das Viereck BCFG ist ein Trapez, wenn die gegenüberliegenden Seiten [BC] und [FG] parallel sind.

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{GF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind Vielfache zueinander und somit parallel.

Also ist das Viereck BCFG ein Trapez.

$$|\overrightarrow{BG}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36 + 4 + 16} = \sqrt{56} \quad |\overrightarrow{CF}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36 + 4 + 16} = \sqrt{56}$$

Da die beiden Seiten gleich groß sind, ist das Trapez gleichschenkelig.

Wie groß sind die Innenwinkel dieses Trapezes?

$$\text{Winkel bei B: } \cos \beta = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BG}}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BG}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}} = \frac{16}{\sqrt{64} \cdot \sqrt{36 + 4 + 16}} \Rightarrow \beta \approx 74,5^\circ$$

Aufgrund der Gleichschenkligkeit ist der Winkel im Punkt C genau so groß.

Die jetzt noch unbekannten Winkel in F und G sind ebenfalls gleich groß.

Mit der Winkelsumme im Trapez gilt: $2 \cdot 74,5 + 2 \cdot \gamma = 360^\circ \Rightarrow \gamma = 105,5^\circ$

Die Winkel im Punkt F und G sind jeweils $105,5^\circ$ groß.

- b) Bestimme r^* so, dass die Pyramidenspitze S von der Ebene E_{r^*} den Abstand 4 hat.

$$\text{HNF der Ebene } E_r: \frac{r \cdot x_1 + 3 \cdot x_3 - 8r}{\sqrt{r^2 + 9}} = 0$$

$$\text{Abstand S von } E_r: \left| \frac{4 \cdot r + 24 - 8 \cdot r}{\sqrt{r^2 + 9}} \right| = 4 \Rightarrow \left| \frac{24 - 4r}{\sqrt{r^2 + 9}} \right| = 4$$

$$1. \text{ Fall: } \frac{24 - 4r}{\sqrt{r^2 + 9}} = 4 \Rightarrow 6 - r = \sqrt{r^2 + 9} \Rightarrow 36 - 12r + r^2 = r^2 + 9 \Rightarrow 12r = 27 \Rightarrow r = \frac{9}{4}$$

Probe der Lösung führt zu einer wahren Aussage

$$\text{2.Fall: } \frac{24-4r}{\sqrt{r^2+9}} = -4 \Rightarrow -6+r = \sqrt{r^2+9} \Rightarrow r^2-12r+36 = r^2+9 \Rightarrow 12r = 27 \Rightarrow r = \frac{9}{4}$$

Probe der Lösung führt zu einer falschen Aussage

Es gilt also $r^* = \frac{9}{4}$ (aus dem 1.Fall) und somit ist die gesuchte Ebene

$$E_{\frac{9}{4}} : \frac{9}{4}x_1 + 3x_3 = 18$$

Gib die Koordinaten desjenigen Punktes in dieser Ebene E_{r^*} an, der von S den Abstand 4 hat.

Der gesuchte Punkt ist der Schnittpunkt P der Lotgeraden h durch $S(4|4|8)$ orthogonal zur Ebene.

$$\text{Lotgeradengleichung: } h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt von h mit $E_{\frac{9}{4}}$:

$$\frac{9}{4}\left(4 + \frac{9}{4}t\right) + 3(8 + 3t) = 18$$

$$\Leftrightarrow 9 + \frac{81}{16}t + 24 + 9t = 18$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{16}{15}$$

Daraus ergibt sich der Schnittpunkt $P\left(\frac{8}{5} \mid 4 \mid \frac{24}{5}\right)$

c) Weise nach, dass die Gerade durch B und C in jeder Ebene E_r liegt.

$$\text{Geradengleichung durch } B \text{ und } C: g_{BC} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnitt von E_r und g_{BC} : $r \cdot 8 + 3 \cdot 0 = 8r$

Dies ist eine wahre Aussage für jedes $r \in \mathbb{R}$.

Somit liegt die Gerade g_{BC} in jeder Ebene E_r .

Welche Schnittfiguren sind möglich? Gib die jeweiligen Werte von r an.

Die Ebenenschar enthält unabhängig vom Wert von r immer die Punkte B und C.

Die Ebenenschar dreht sich somit um diese "Achse" [BC].

Enthält die Ebenenschar den Punkt A(0|0|0) (dies ist für $r = 0$ der Fall) stimmt die Ebene mit der Grundfläche der Pyramide überein. Schnittfigur: Quadrat

Enthält die Ebenenschar den Punkt S(4|4|8), liegt die Dreiecksfläche BCS auf der Ebene.

S(4|4|8) liegt für folgendes r auf der Ebene: $r \cdot 4 + 3 \cdot 8 = 8 \cdot r \Leftrightarrow r = 6$

Schnittfigur: Dreieck

Für alle $0 < r < 6$ liegt die Ebene innerhalb der Pyramide und die Schnittfigur ist ein gleichschenkliges Trapez.

Für $r < 0$ oder $r > 6$ hat die Ebene mit der Pyramide nur die Grundkante [BC] gemeinsam.

Aufgabe 4: (abgewandelte Abituraufgabe 2005)

a) *Bestimme eine Gleichung von E.*

Da E parallel zur Geraden g verläuft, ist der Richtungsvektor von g auch ein Spannvektor von E. Ein zweiter Spannvektor von E ist der Vektor $\overrightarrow{AB}$.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Umformung der Ebene in eine Koordinatengleichung:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ bzw. vereinfacht } \vec{n}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ansatz Koordinatengleichung: $x_3 = d$

Einsetzen des Punktes A(2|1|3) ergibt $d = 3$.

Koordinatengleichung von E: $x_3 = 3$

Beschreibe die Lage von E.

Die Ebene E ist eine um 3 nach oben verschobene parallele Ebene zur $x_1 - x_2$ -Ebene.

Welchen Abstand hat g von E?

Da g parallel zu E ist, wird auf der Gerade g ein beliebiger Punkt ausgewählt (z.B. P(5|3|5)) und dessen Abstand zur Ebene E ermittelt.

Da die x_3 -Koordinate von P den Wert 5 besitzt ist und die Ebene E eine um 3 nach oben verschobene parallele Ebene zur $x_1 - x_2$ -Ebene ist, ist der gesuchte Abstand $d = 5 - 3 = 2$.

Man könnte den Abstand alternativ auch mit der HNF von E bestimmen.

b) *Bestimme die Koordinaten von T.*

Da der Punkt T auf der Geraden g liegt, besitzt er die Koordinaten $T(5+r \mid 3 \mid 5)$.

Das Dreieck ABT ist bei T rechtwinklig, wenn gilt: $\overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{BT} = 0$

$$\begin{pmatrix} 3+r \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3+r \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (3+r)^2 - 4 + 4 = 0 \Rightarrow r = -3 \quad \text{also } T(2 \mid 3 \mid 5).$$

Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck ABT?

Da das Dreieck ABT im Punkt T rechtwinklig ist, berechnet sich der Flächeninhalt wie folgt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AT}| \cdot |\overrightarrow{BT}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{8} = 4$$

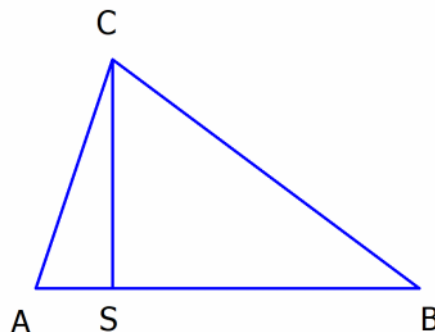
Bestimme einen Punkt, der von A, B und T den gleichen Abstand hat.

Der Punkt, der von allen Eckpunkten des Dreiecks gleichen Abstand besitzt, ist der Umkreismittelpunkt.

Da es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt, ist der Umkreis der Thaleskreis, dessen Mittelpunkt auf der Mitte der Hypotenuse [AB] liegt.

Der Mittelpunkt der Strecke [AB] ist $M_{AB}(2 \mid 3 \mid 3)$ und dies ist der gesuchte Punkt.

c) *Bestimme dessen Volumen.*



Der Radius des Doppelkegels entspricht dem Abstand des Punktes C von der

$$\text{Geraden } g_{AB} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Allgemeiner Punkt auf der Geraden: $S(2|1+4 \cdot r|3)$

Bedingung: $\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2+4r \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow -8+16r = 0 \Leftrightarrow r = 0,5$$

Lotfußpunkt $S(2|3|3)$

Radius der beiden Kegel: $r = |\overrightarrow{CS}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = 2$

Höhe des ersten Kegels: $h_1 = |\overrightarrow{AS}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 2$

Höhe des zweiten Kegels: $h_2 = |\overrightarrow{BS}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 2$

$$V_{1.\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h_1 = \frac{8}{3} \pi$$

$$V_{2.\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h_2 = \frac{8}{3} \pi$$

$$V_{\text{Doppelkegel}} = \frac{16}{3} \pi$$

Aufgabe 5: (abgewandelte Abituraufgabe 2006)

a) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E.

$$\text{Parameterform von E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenvektor von E: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 \\ -60 \\ -24 \end{pmatrix} \text{ bzw. gekürzt } \vec{n}^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ansatz für Koordinatengleichung: E: $4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = d$

Einsetzen des Punktes A(3|5|-4): $12 + 25 - 8 = d \Leftrightarrow d = 29$

Koordinatengleichung: E: $4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 29$

Zeige, dass das Dreieck ABD gleichschenkelig, aber nicht gleichseitig ist.

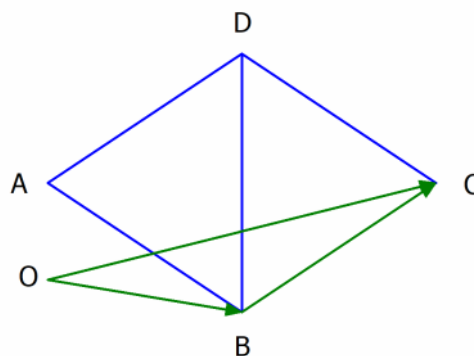
Für die Gleichschenkligkeit müssen zwei der drei Dreiecksseiten gleich lang sein.

$$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{81} = 9 \quad \overline{AD} = |\overrightarrow{AD}| = \left| \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{81} = 9$$

$$\overline{BD} = |\overrightarrow{BD}| = \left| \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{144} = 12$$

Das Dreieck ist gleichschenkelig, aber nicht gleichseitig.

Bestimme die Koordinaten des Punktes C so, dass das Viereck ABCD eine Raute ist.



Koordinaten von C erhält man mit Hilfe eines Vektorzuges:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{Somit gilt } C(-3|5|8)$$

Berechne die Koordinaten des Diagonalschnittpunktes M dieser Raute.

Der Diagonalschnittpunkt M entspricht dem Mittelpunkt der Strecke BD. Somit gilt M(0|5|2).

b) Bestimme das Volumen dieser Pyramide.

Das Volumen der Pyramide wird berechnet mit der Formel $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{\text{Pyramide}}$

$$\text{Grundfläche} = \text{Rautenfläche: } A_{\text{Raute}} = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2}$$

$$\text{Es gilt } \overline{AC} = |\overrightarrow{AC}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36 + 144} = \sqrt{180} \quad \text{und } \overline{BD} = 12$$

$$A_{\text{Raute}} = \frac{\sqrt{180} \cdot 12}{2} = 6 \cdot \sqrt{180}$$

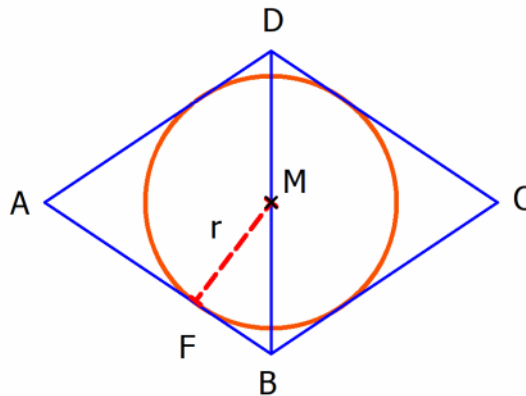
Die Höhe der Pyramide entspricht dem Abstand des Punktes S von der Grundflächenebene $4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 29$.

$$\text{HNF von E: } \frac{4x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 29}{\sqrt{45}} = 0$$

$$h_{\text{Pyramide}} = d(S, E) = \left| \frac{4 \cdot 8 + 5 \cdot 15 + 2 \cdot 6 - 29}{\sqrt{45}} \right| = \frac{90}{\sqrt{45}}$$

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \sqrt{180} \cdot \frac{90}{\sqrt{45}} = 360 \text{ Volumeneinheiten}$$

Berechne das Volumen des Kreiskegels.



Das Volumen des einbeschriebenen Kegels lautet $V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h_{\text{Kegel}}$

Es gilt $h_{\text{Kegel}} = h_{\text{Pyramide}} = \frac{90}{\sqrt{45}}$.

Der Radius des Kegels entspricht dem Abstand des Mittelpunktes M von der Geraden durch A und B.

Gerade durch AB: $g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Gesucht ist der Lotfußpunkt F.

Allgemeiner Geradenpunkt: $F(3+r \mid 5-4r \mid -4+8r)$

Bedingung: $\overrightarrow{MF} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3+r \\ -4r \\ -6+8r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = 0$

$$3+r+16r-48+64r=0 \Leftrightarrow r = \frac{5}{9}$$

Lotfußpunkt $F(\frac{32}{9} \mid \frac{25}{9} \mid \frac{4}{9})$

$$r_{\text{Kegel}} = |\overrightarrow{MF}| = \left| \begin{pmatrix} 32/9 \\ -20/9 \\ -14/9 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{1620}{81}} = \sqrt{20}$$

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 20 \cdot \frac{90}{\sqrt{45}} \approx 281 \text{ Volumeneinheiten}$$

Aufgabe 6-1:

a) Zeige, dass $S(8|2|40)$ die Spitze der ursprünglichen Pyramide ist.

Die Spitze S der Pyramide ergibt sich als Schnittpunkt zweier (verlängerter) Seitenkanten des Pyramidenstumpfes.

$$\text{Gerade durch AA* : } g_{AA^*} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade durch BB* : } g_{BB^*} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$4r = 6 + s \quad (1)$$

$$\text{Schnittpunkt der beiden Geraden: } r = 6 - 2s \quad (2)$$

$$20r = 20s \quad (3)$$

Einsetzen von (2) in (1): $4(6 - 2s) = 6 + s \Leftrightarrow s = 2$

Aus (2) folgt $r = 2$

Probe mit (3) ergibt die wahre Aussage $40 = 40$.

Einsetzen von $r = 2$ in die Gerade AA* ergibt Schnittpunkt $S(8|2|40)$.

Bestimme die Koordinaten des Punktes D*.

Die Koordinaten von D* erhält man als Schnittpunkt der Geraden durch D und S mit der Ebene (Deckfläche) durch A*B*C*.

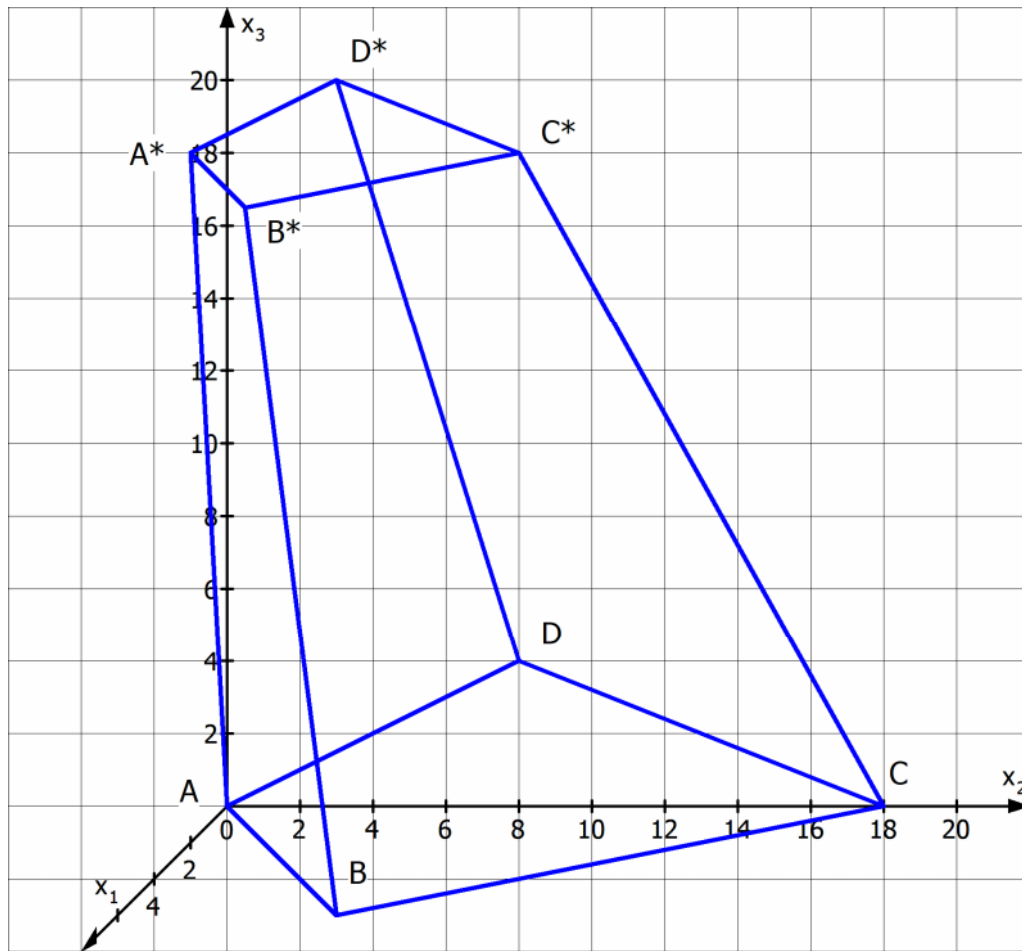
$$\text{Gerade durch D und S: } g_{DS} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ -2 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Ebene durch A*B*C*:

Da alle Punkte den x_3 -Wert 20 besitzen, lautet die Koordinatengleichung der Ebene $E : x_3 = 20$

Schnittpunkt der Gerade mit E: $40r = 20 \Rightarrow r = 0,5 \Rightarrow D^*(0|3|20)$

Zeichne den Pyramidenstumpf in ein Koordinatensystem ein.



b) Berechne den Flächeninhalt der Wand ABB^*A^* .

Das Viereck ABB^*A^* stellt ein Trapez dar, da die Seiten AB und A^*B^* zueinander parallel sind.

Rechnerischer Nachweis:

Die Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{A^*B^*} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind Vielfache und damit parallel.

Inhalt der Trapezfläche: $A_{\text{Trapez}} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A^*B^*}}{2} \cdot h_{\text{Trapez}}$

Hierbei gilt $\overrightarrow{AB} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} = 6 \cdot \sqrt{2}$ und $\overrightarrow{A^*B^*} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2}$

Die Höhe des Trapezes entspricht dem Abstand des Punktes A* von der Geraden

durch A und B $g_{AB} : \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Allgemeiner Punkt auf der Geraden: L(6s | 6s | 0)

Bedingung: $\overrightarrow{A^*L} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 6s-4 \\ 6s-1 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$$36s - 24 + 36s - 6 = 0 \Leftrightarrow s = \frac{5}{12}$$

Lotfußpunkt: L(2,5 | 2,5 | 0)

Abstand des Punktes A* von Gerade:

$$|\overrightarrow{A^*L}| = \left| \begin{pmatrix} -1,5 \\ 1,5 \\ -20 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2,25 + 2,25 + 400} = \sqrt{404,5} \text{ Meter}$$

$$\text{Trapezfläche} = A_{\text{Trapez}} = \frac{6\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{404,5} = 128 \text{ m}^2$$

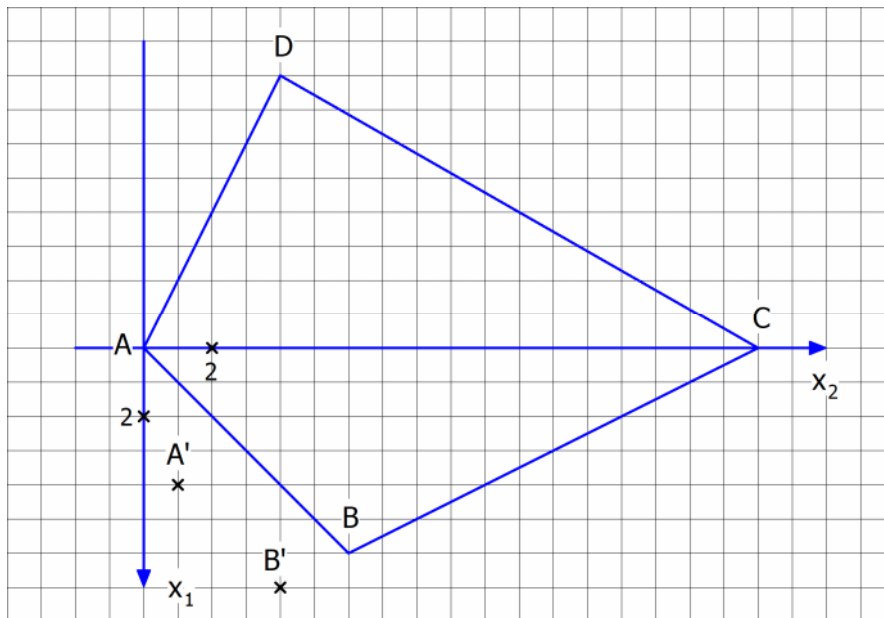
Der Flächeninhalt der Wand ABB*A* beträgt etwa 128 m².

*Untersuche, ob die Wand ABB*A* nach außen überhängt.*

Damit die Wand ABB*A* überhängt, müssen die Punkte A' und B', die sich durch Projektion der gegebenen Punkte A* und B* auf die $x_1 - x_2$ -Ebene ergeben, außerhalb des Grundflächenvierecks ABCD liegen.

Es gilt: A'(4|1|0) und B'(7|4|0).

Zeichnet man in der $x_1 - x_2$ -Ebene das Viereck ABCD und die Punkte A' und B' ein, erkennt man, dass die Punkte A' und B' außerhalb des Vierecks liegen.

**Aufgabe 6-2:**

(1)

Der Richtungsvektor von h muss so gewählt werden, dass der Punkt $S(-4|0|-1)$ auf der Geraden h liegt.

Der Punkt S liegt auf h , wenn für irgendeinen Parameterwert t der Punkt entsteht.

Sei zum Beispiel $t = 1$:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Hinweis: Wird ein anderer Wert für t gewählt ergibt sich ein anderer Richtungsvektor als Lösung.

(2)

Der Richtungsvektor von h darf kein vielfacher Vektor zum Richtungsvektor von g sein.

Dies gilt zum Beispiel für den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die beiden Geraden dürfen sich nicht schneiden.

$$s = 2 + 0$$

Prüfung durch Gleichsetzen: $0 = 2$

$$3 + s = t$$

Dieses Gleichungssystem besitzt keine Lösung, damit sind die Geraden windschief.

Hinweis: Es gibt auch andere mögliche Lösungen für den Richtungsvektor.

(3)

Damit sich die Geraden orthogonal schneiden, sind zwei Bedingungen erforderlich.

1. Bedingung: Richtungsvektoren stehen orthogonal zueinander

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow v_1 + v_3 = 0 \Leftrightarrow v_3 = -v_1$$

2. Bedingung: Geraden schneiden sich in einem Punkt

$$\text{Gleichsetzen: } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} s = 2 + t \cdot v_1 \\ 0 = 2 + t \cdot v_2 \\ 3 + s = -t \cdot v_1 \end{array}$$

Addition der 1. und 3. Zeile: $3 + 2s = 2 \Rightarrow s = -0,5$

Also lautet der gemeinsame Punkt $F(-0,5|0|2,5)$

Nun muss der Richtungsvektor so bestimmt werden, dass F auf der Geraden h liegt:

$$\begin{pmatrix} -0,5 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$$

Wähle z.B. $t = 1$

Daraus folgt $v_1 = -2,5$ und $v_2 = -2$

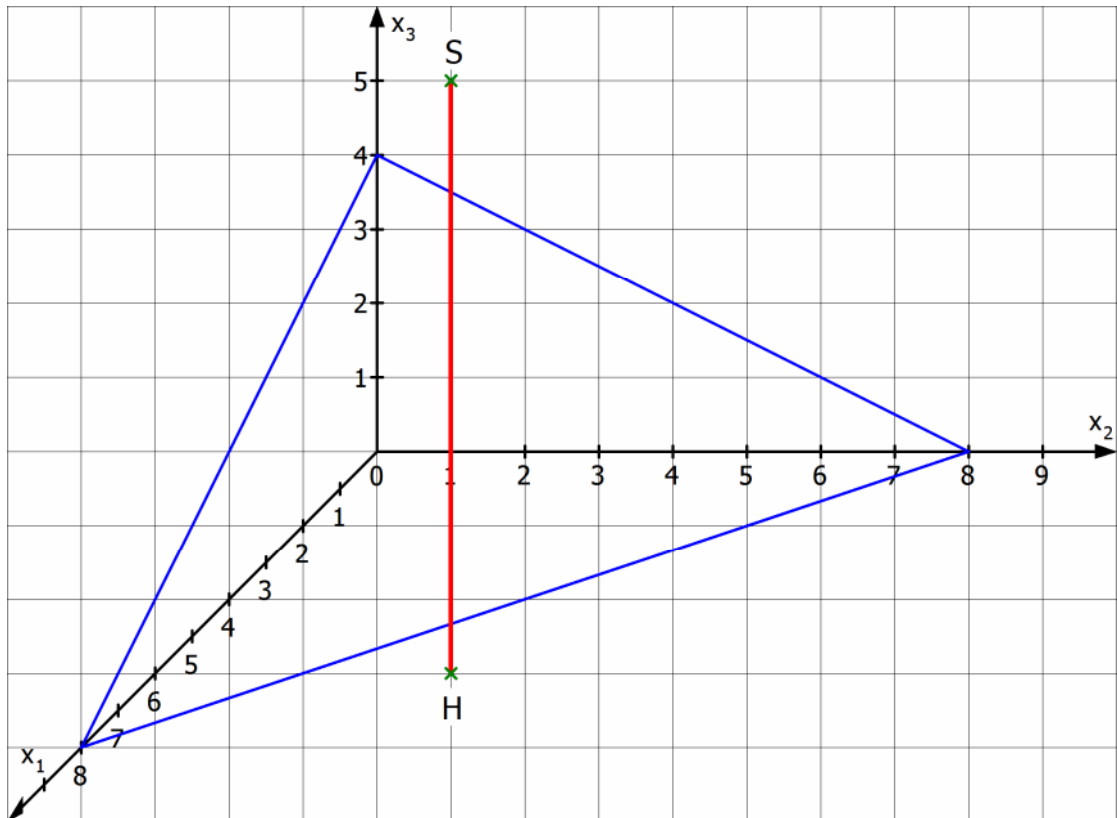
$$\text{Ein möglicher Richtungsvektor ist } \vec{v} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ -2 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7-1:

a) Stelle den Hang und den Sendemast in einem Koordinatensystem dar.

Für die Zeichnung der Ebene benötigt man die Spurpunkte:

$$S_1(8|0|0), S_2(0|8|0), S_3(0|0|4)$$



Bestimme den Neigungswinkel des Hangs.

Neigungswinkel zwischen der Ebene E und der $x_1 - x_2$ –Ebene mit der

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \alpha \approx 35,3^\circ$$

Berechne die Koordinaten des Verankerungspunktes am Hang.

Bestimme die Länge des Stahlseils.

Der Punkt auf der halben Masthöhe hat die Koordinaten L(6|4|4).

Die Länge des Stahlseils entspricht dem kürzesten Weg vom Punkt L zum Hang. Dies ist gleichzeitig der Abstand von L zur Hangebene E.

Für die Koordinaten des Verankerungspunktes wird eine Hilfsgerade h orthogonal zur Hangebene durch $L(6|4|4)$ aufgestellt:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt von h mit E entspricht dem Verankerungspunkt V :

$$(6+r) + (4+r) + 2 \cdot (4+2r) = 8 \Rightarrow 6r = -10 \Rightarrow r = -\frac{5}{3}$$

Einsetzen des Wertes von r in die Gerade h ergibt $V(\frac{13}{3} | \frac{7}{3} | \frac{2}{3})$.

$$\text{Länge des Stahlseils} = |\vec{LV}| = \left| \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{150}{9}} = \frac{\sqrt{150}}{3} \approx 4,08 = 40,8 \text{ Meter}$$

- b) *Beschreibe einen Weg, wie man die Gesamtlänge des Schattens bestimmen kann.*

Die Richtung der Lichtstrahlen ist gegeben durch die Verbindung der Spitze S des Mastes mit dem Schattenpunkt T .

Der Schatten des Mastes verläuft von H zu einem Punkt Z auf der Spurgeraden s_{12} der Ebene E und von dort zum Punkt T .

Z liegt außerdem in der Schattenebene E des Mastes.

- 1.) Gleichung der Spurgeraden s_{12} aufstellen.
- 2.) Gleichung der Ebene E durch S mit den Spannvektoren $\vec{SH}$ und $\vec{ST}$ aufstellen.
- 3.) Berechnung des Schnittpunktes Z von s_{12} und E .
- 4.) Gesamtlänge des Schattens = $|\vec{HZ}| + |\vec{ZT}|$

c) Bestimme die Höhe, in welcher der Sendemast abgeknickt ist.

Der Punkt $K(6/4/k)$ hat die Eigenschaft, dass die Spitze des Mastes $S(6|4|8)$ die gleiche Entfernung hat wie der Punkt $R(4/0/2)$.

$$\text{Also gilt: } \overline{SK} = \overline{RK} \Rightarrow 8 - k = \sqrt{2^2 + 4^2 + (k - 2)^2} \Rightarrow (8 - k)^2 = 20 + (k - 2)^2$$

$$\Rightarrow 64 - 16k + k^2 = 20 + k^2 - 4k + 4 \Rightarrow -12k = -40 \Rightarrow k = \frac{10}{3}$$

Der Sendemast wird in einer Höhe von $10 \cdot \frac{10}{3} \text{ m} = \frac{100}{3} \text{ m}$ abgeknickt.

Aufgabe 7-2:

Voraussetzung:

$$(1) \quad |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$$

$$(2) \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

$$\text{Aus (1) folgt: } |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| \Rightarrow |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 \Rightarrow \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AC}^2.$$

1. Behauptung: Strecken $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$ sind orthogonal, also $\overline{MP} \cdot \overline{MQ} = 0$

$$\begin{aligned} \overline{MP} \cdot \overline{MQ} &= \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AQ} \right) = \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \right) \cdot \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \right) = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = 0 \end{aligned}$$

Damit ist die Orthogonalität der Strecken $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$ gezeigt.

2. Behauptung: Strecken $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$ sind gleich lang, also $|\overrightarrow{MP}| = |\overrightarrow{MQ}|$

$$\text{Aus } |\overrightarrow{MP}| = |\overrightarrow{MQ}| \text{ folgt } \overrightarrow{MP}^2 = \overrightarrow{MQ}^2.$$

$$\overrightarrow{MP}^2 = \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \right)^2 = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = \frac{1}{4} |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = \frac{5}{4} |\overrightarrow{AB}|^2$$

$$\overrightarrow{MQ}^2 = \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \right)^2 = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{4} |\overrightarrow{AC}|^2 = \frac{5}{4} |\overrightarrow{AB}|^2$$

Damit sind die beiden Strecken gleich lang.

Aufgabe 8: (abgewandelte Abituraufgabe 2007)

a) Berechne den Abstand zwischen den Kanten AB und GH.

Zunächst werden die restlichen Koordinaten der Eckpunkte bestimmt:

$A(0|0|0)$, $B(3|0|0)$, $C(3|5|0)$, $D(0|5|0)$, $E(0|0|4)$, $F(3|0|4)$, $G(3|5|4)$, $H(0|5|4)$

Der Abstand der Kanten AB und GH entspricht der Länge der Strecke $\overline{AH}$:

$$\overline{AH} = |\overline{AH}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$$

Zeige, dass die Gerade durch E und H in jeder Ebene E_t liegt.

Geradengleichung durch E und H: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schnitt der Gerade g mit der Ebenenschar:

$$t \cdot 0 - 4 = -4 \Leftrightarrow -4 = -4$$

Es entsteht eine wahre Aussage unabhängig von r und unabhängig vom Parameter t. Damit liegt g in jeder Ebene der Schar.

In welcher Ebene E_t liegt der Deckel bei geschlossener Kiste?

Die Deckelebene EFGH ist parallel zur $x_1 - x_2$ - Ebene auf der Höhe $x_3 = 4$.

Koordinatengleichung der Ebene EFGH: $x_3 = 4$.

Dies entspricht der Ebene E_0 der Schar.

Liegt der Deckel in einer Ebene E_{t^*} , wenn er um 90° geöffnet ist?

Wird der Deckel um 90° geöffnet, liegt der Deckel in der $x_2 - x_3$ -Ebene mit der Koordinatengleichung: $x_1 = 0$.

Diese Ebenengleichung entspricht jedoch keiner Ebene der Schar, da die Variable x_3 in der Ebenenschar immer enthalten ist.

b) *Berechne die Koordinaten von P.*

$$E_2: 2x_1 - x_3 = -4.$$

Der Befestigungspunkt des Stabes entspricht dem Mittelpunkt M der Kante $\overline{EF}$, also $M(1,5|0|4)$.

Um den Punkt P zu erhalten, wird eine Hilfsgerade h aufgestellt, die durch M und

orthogonal zu E_2 verläuft: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

P ist der Schnittpunkt von h und E_2 .

$$2(1,5 + 2s) - (4 - s) = -4 \Rightarrow 3 + 4s - 4 + s = -4 \Rightarrow 5s = -3 \Rightarrow s = -\frac{3}{5}$$

Schnittpunkt $P(0,3|0|4,6)$

c) *Wie groß ist der Öffnungswinkel, wenn der Deckel in E_2 liegt?*

Der Öffnungswinkel entspricht dem Winkel der Ebene EFGH mit der Gleichung $E_0: x_3 = 4$ und der Ebene $E_2: 2x_1 - x_3 = -4$.

$$\cos \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha \approx 63,4^\circ$$

In welcher Ebene E_t liegt der Deckel, wenn der Öffnungswinkel 60° beträgt?

Bei einem Öffnungswinkel von 60° gilt:

$$\cos 60^\circ = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{t^2 + 1}} \Rightarrow 0,5 = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \Rightarrow t^2 + 1 = 4 \Rightarrow t = \pm\sqrt{3}$$

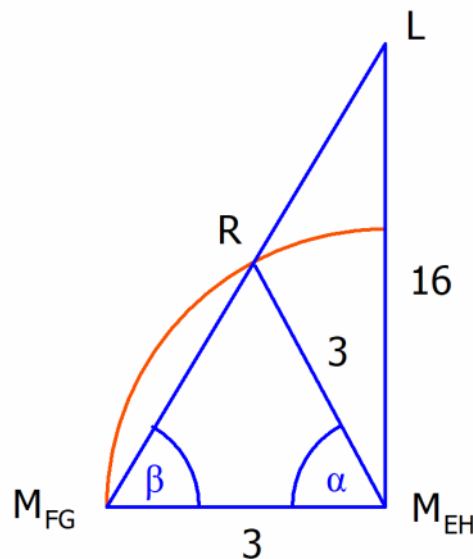
Da $t \geq 0$ gilt, folgt daraus $t = \sqrt{3}$.

Bestimme den Parameter t in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel α für $\alpha < 90^\circ$.

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \Rightarrow t^2 + 1 = \frac{1}{(\cos \alpha)^2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{1}{(\cos \alpha)^2} - 1}$$

Das positive Vorzeichen der Wurzel ergibt sich aus der Bedingung $t \geq 0$

- d) Die Lichtquelle L liegt genau oberhalb des Mittelpunktes der Kanten AD bzw. EH . Anhand der folgenden Skizze kann der gesuchte Winkel α ermittelt werden. Die Strecke von L zum Mittelpunkt M_{FG} der Kante FG stellt den Lichtstrahl dar. Sobald der Deckel, der in geschlossenem Zustand die Strecke von M_{FG} nach M_{EH} darstellt, über den Punkt R hinaus geöffnet wird, fällt Licht in die Kiste.



Es gilt $\tan \beta = \frac{16}{3} \Rightarrow \beta \approx 79,38^\circ$.

Da das Dreieck $M_{FG} M_{EH} R$ gleichschenkelig ist, ist der gesuchte Winkel $\alpha = 180 - 2 \cdot \beta = 21,24^\circ$.

Aufgabe 9: (abgewandelte Abituraufgabe 2008)

- a) *Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Grundfläche der Pyramide liegt.*

Die Ebene E enthält die Punkte A(10|6|0), B(6|10|0) und C(10|10|5).

Parameterform der Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$

Normalenvektor der Ebene E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ -16 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

Ansatz für Koordinatengleichung: E: $5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = d$

Einsetzen des Punktes A(10|6|0): $d = 80$

Koordinatengleichung von E: $5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 80$

Welchen Winkel schließen die Grundflächen von Würfel und Pyramide ein?

Koordinatengleichung der Grundfläche des Würfels: $x_3 = 0$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{25 + 25 + 16} \cdot \sqrt{1}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{66}} \Rightarrow \alpha \approx 60,5^\circ$$

Untersuche, ob die Höhe der Pyramide auf der Diagonalen PS des Würfels liegt.

Die Höhe der Pyramide liegt auf der Geraden h, die orthogonal zur Ebene E und durch den Punkt S verläuft.

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Die Diagonale PS liegt dann auf der Gerade h, wenn sowohl der Punkt P als auch der Punkt S auf h liegen.

Der Punkt S liegt schon aufgrund der Vorgabe auf h, die Punktprobe muss somit nur noch für den Punkt P(10|10|0) erfolgen.

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aus den ersten beiden Zeilen folgt $t = 2$ und aus der 3. Zeile $t = 2,5$.

Damit liegt P nicht auf der Geraden h.

Die Höhe der Pyramide liegt damit nicht auf der Diagonalen PS des Würfels.

b) Wie viel Prozent des Würfelvolumens beträgt das Pyramidenvolumen?

Würfelvolumen: $V_{\text{Würfel}} = 10^3 = 1000$ Volumeneinheiten

Pyramidenvolumen: $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{ABC}} \cdot h_{\text{Pyr}}$

$$\begin{aligned} \text{Flächeninhalt des Dreiecks: } A_{\text{ABC}} &= \frac{1}{2} \cdot |\overline{\text{AB}} \times \overline{\text{AC}}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ -16 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{400 + 400 + 256} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1056} \end{aligned}$$

Die Höhe der Pyramide entspricht dem Abstand des Punktes S von der Ebene E.

$$\text{HNF von E: } \frac{5x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 80}{\sqrt{66}} = 0$$

$$d(S, E) = \left| \frac{5 \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 4 \cdot 10 - 80}{\sqrt{66}} \right| = \left| \frac{-120}{\sqrt{66}} \right| = \frac{120}{\sqrt{66}} = h_{\text{Pyr}}$$

$$V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1056} \cdot \frac{120}{\sqrt{66}} = 80 \text{ Volumeneinheiten}$$

Das Pyramidenvolumen beträgt $\frac{80}{1000} = 0,08 = 8\%$ des Würfelvolumens.

c) *Welches Volumen hat ein solcher Quader mit der Breite $b = 4$?*

Berechnung der Koordinaten des Punktes Q.

Der Punkt Q liegt auf der Kante AS:

$$\text{Geradengleichung der Kante AS: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Vom Punkt Q ist außerdem bekannt, dass der x_2 -Wert = $b = 4$ beträgt.

Der Punkt Q besitzt somit die Koordinaten $Q(q_1 | 4 | q_3)$

$$\text{Daraus folgt: } \begin{pmatrix} q_1 \\ 4 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Aus der 2. Zeile ergibt sich $r = \frac{1}{3}$ und damit $q_3 = \frac{10}{3}$.

Volumen des Quaders: $V_{\text{Quader}} = 10 \cdot b \cdot q_3 = \frac{400}{3}$ Volumeneinheiten.

Welche Werte kann das Volumen eines solchen Quaders annehmen, wenn die Breite b variabel ist?

Bei variabler Breite b mit $0 \leq b \leq 6$ (für $b = 6$ ist A ein Eckpunkt des Quaders) besitzt der Punkt Q die Koordinaten $Q(q_1 | b | q_3)$.

$$\text{Daraus folgt: } \begin{pmatrix} q_1 \\ b \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Aus der 2. Zeile ergibt sich $r = \frac{b-6}{-6} = 1 - \frac{1}{6}b$ und damit $q_3 = \frac{10}{3}$.

Volumen des Quaders: $V = 10 \cdot b \cdot 10 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}b\right) = 100b - \frac{100}{6}b^2$ Volumeneinheiten.

Das Schaubild der Funktion $V(b) = 100b - \frac{100}{6}b^2$ ist eine nach unten geöffnete Parabel, die einen Hochpunkt besitzt.

Es gilt $V'(b) = 100 - \frac{100}{3}b$

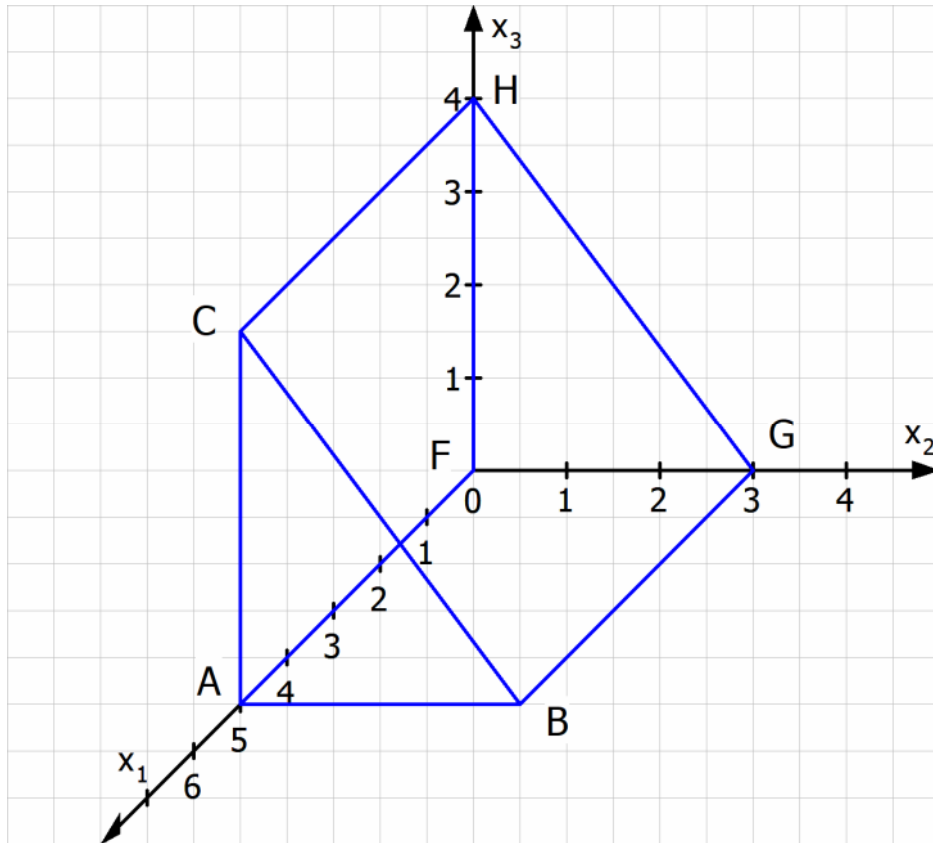
$$100 - \frac{100}{3}b = 0 \Leftrightarrow b = 3$$

Es existiert ein Maximum für $b = 3$ mit $V(3) = 150$

Wegen $V(0) = 0$ und $V(6) = 0$ kann das Volumen des Quaders alle Werte zwischen 0 und 150 Volumeneinheiten annehmen.

Aufgabe 10: (abgewandelte Abituraufgabe 2008)

a) Stelle das Prisma in einem Koordinatensystem dar.



Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Fläche BGHC liegt.

Aufstellen der Ebenengleichung durch B, C und G:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenvektor von E: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ -15 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ansatz für die Koordinatengleichung von E: $4x_2 + 3x_3 = d$

Einsetzen des Punktes B(5|3|0): $d = 12$

Koordinatengleichung von E: $4x_2 + 3x_3 = 12$

Unter welchem Winkel schneidet E die $x_1 - x_2$ -Ebene?

$$\cos \alpha = \frac{\begin{vmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{16+9} \cdot \sqrt{1}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha \approx 53,1^\circ$$

Berechne den Abstand des Punktes A von der Geraden CG.

Gleichung der Geraden durch C(5|0|4) und G(0|3|0): $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Laufender Punkt auf der Geraden g: S(5 - 5r | 3r | 4 - 4r)

Bedingung: $\overrightarrow{AS} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -5r \\ 3r \\ 4 - 4r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$

$$25r + 9r - 16 + 16r = 0 \Leftrightarrow r = 0,32$$

Lotfußpunkt S(3,4 | 0,96 | 2,72)

Abstand von A zur Geraden g:

$$|\overrightarrow{AS}| = \sqrt{(5-3,4)^2 + (0-0,96)^2 + (0-2,72)^2} = \sqrt{10,88} \approx 3,3$$

- b) Ermittle die Abstände des Punktes M von den drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas.

Berührt der Zylinder alle drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas?

Abstand des Punktes M von der Ebene E:

HNF von E: $\frac{4x_2 + 3x_3 - 12}{5} = 0$

$$d(M,E) = \left| \frac{4 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5 - 12}{5} \right| = 1,7$$

Abstand des Punktes M von der Seitenfläche ADCH ist 0,5
(x_2 -Koordinate von M)

Abstand des Punktes M von der Seitenfläche ABGF ist 0,5
(x_3 -Koordinate von M)

Der Zylinder berührt nicht alle drei Seitenflächen, da er von der Seitenfläche BGHC den Abstand 1,7 besitzt, der größer ist als der Radius des Zylinders.

Bestimme den Radius r dieses Zylinders.

Der Abstand des Punktes $M^*(0|r|r)$ von der Seitenfläche ADCH entspricht der x_2 -Koordinate von M^* . Der Abstand ist r .

Der Abstand des Punktes M^* von der Seitenfläche ABGF entspricht der x_3 -Koordinate von M . Der Abstand ist r .

Damit der Zylinder alle drei Seitenflächen berührt, muss für die dritte Seitenfläche gelten:

$$d(M^*, E) = \left| \frac{4 \cdot r + 3 \cdot r - 12}{5} \right| = r$$

Diese Betragsgleichung muss mithilfe einer Fallunterscheidung gelöst werden:

$$1.\text{Fall: } \frac{7r - 12}{5} = r \Rightarrow r = 6$$

$$2.\text{Fall: } \frac{7r - 12}{5} = -r \Rightarrow r = 1$$

Der gesuchte Radius des Zylinders ist $r = 1$.

Hinweis:

Die Lösung $r = 6$ des 1.Falles würde eine Berührung des Zylinders an die drei Seitenflächen von außen darstellen.

Aufgabe 11: (abgewandelte Abituraufgabe 2009)

a) In welchem Punkt befindet sich das Flugzeug um 7.01 Uhr?

Einsetzen von $t = 1$ in die Gerade:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 27 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Der gesuchte Punkt lautet $Q(10|27|6)$.

Woran erkennt man, dass sich das Flugzeug im Sinkflug befindet?

Das Flugzeug befindet sich im Sinkflug, da die x_3 -Koordinate des Richtungsvektors negativ ist. Diese Koordinate gibt an, um wie viel km das Flugzeug pro Minute an Höhe gewinnt bzw. verliert.

Bestimme die Geschwindigkeit des Flugzeugs in km/h.

Die Geschwindigkeit ergibt sich aus dem Betrag des Richtungsvektors:

$$\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$$

$$\text{Geschwindigkeit des Flugzeugs: } v = \sqrt{14} \frac{\text{km}}{\text{min}} \approx 224,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Unter welchem Winkel fliegt das Flugzeug auf den Boden zu?

Der Neigungswinkel des Flugzeugs entspricht dem Schnittwinkel der Gerade f_1 mit der $x_1 - x_2$ -Ebene:

$$\text{Normalenvektor der } x_1 - x_2 \text{-Ebene: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\sin \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{9 + 4 + 1} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{14}} \Rightarrow \alpha \approx 15,5^\circ$$

Zu welcher Uhrzeit und in welchem Punkt würde es bei Beibehaltung dieser Flugbahn auf dem Boden aufsetzen?

Beim Aufsetzen auf dem Boden gilt $x_3 = 0$.

$$x_3 = 7 - t = 0 \Rightarrow t = 7.$$

Eingesetzt in die Gerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$

Das Flugzeug landet um 7.07 Uhr im Punkt L(28|15|0).

b) Prüfe, ob das zutrifft.

Aufstellen einer Ebenengleichung E, in der die Gerade f_1 und der Punkt $R_1(6 | 3 | 0)$ enthalten sind:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 26 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Der zweite Spannvektor von E ergibt sich aus der Differenzbildung des Ortsvektors von R_1 und des Ortsvektors von E.

Der Anflug ist optimal, wenn in der Ebene E der Punkt $R_2(17 | 9 | 0)$ enthalten ist. Prüfung mit einer Punktprobe:

$$\begin{pmatrix} 17 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 26 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Als Lösung dieses Gleichungssystems ergibt sich $t = 3,5$ und $u = -0,5$. Daraus folgt, dass der Punkt R_2 in der Ebene E.

Somit ist der Anflug des Testflugzeugs optimal.

Um wie viel Uhr ist dies der Fall?

Berechnung des Zeitpunktes, ab wann die Radarstation R_2 die Überwachung übernimmt:

Zunächst wird ermittelt, zu welchem Zeitpunkt der Abstand zwischen dem Flugzeug F_1 und der Radarstation R_1 minimal ist.

Hierzu berechnet man den Abstand des Punktes $R_1(6 | 3 | 0)$ von der Geraden f_1 .

Allgemeiner Punkt von f_1 : $S(7 + 3t | 29 - 2t | 7 - t)$

$$\text{Bedingung: } \overrightarrow{R_1 S} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1+3t \\ 26-2t \\ 7-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$3 + 9t - 52 + 4t - 7 + t = 0 \Leftrightarrow t = 4$$

Um 7.04 Uhr ist der Abstand zwischen dem Flugzeug und der Station R_1 minimal. Danach übernimmt die Station R_2 die Überwachung.

c) *Wie weit sind die Flugzeuge F_1 und F_2 um 7.04 Uhr voneinander entfernt?*

Um 7.04 Uhr befindet sich das Flugzeug F_1 im Punkt $S(19|21|3)$.

$$\text{Einsetzen von } t = 4 \text{ in die Gerade } f_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 19 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Das Flugzeug F_2 befindet sich um 7.04 Uhr im Punkt $T(26|19|7)$.

$$\text{Abstand der Flugzeuge: } |\overrightarrow{ST}| = \left| \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{49 + 4 + 16} = \sqrt{69} \approx 8,3 \text{ km.}$$

Die Flugzeuge sind um 7.04 Uhr ca. 8,3 km voneinander entfernt.

Berechne, wie nahe sich die beiden Flugzeuge kommen.

Das Flugzeug F_1 befindet sich zum Zeitpunkt t im Punkt $P_t(7 + 3t \mid 29 - 2t \mid 7 - t)$.

Das Flugzeug F_2 befindet sich zum Zeitpunkt t im Punkt $Q_t(18 + 2t \mid 11 + 2t \mid 7)$.

Der Abstand der Punkte zum Zeitpunkt t beträgt $|\overrightarrow{P_t Q_t}| = \sqrt{(11 - t)^2 + (-18 + 4t)^2 + t^2}$

Nun ist t so zu wählen, dass der Abstand minimal wird.

Hierzu betrachtet man die Funktion $f(t) = (11 - t)^2 + (-18 + 4t)^2 + t^2$

Gesucht ist die Extremstelle von f :

$$f'(t) = 2(11 - t) \cdot (-1) + 2(-18 + 4t) \cdot 4 + 2t = 36t - 166$$

$$f''(t) = 36$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 36t - 166 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{83}{18} \approx 4,61$$

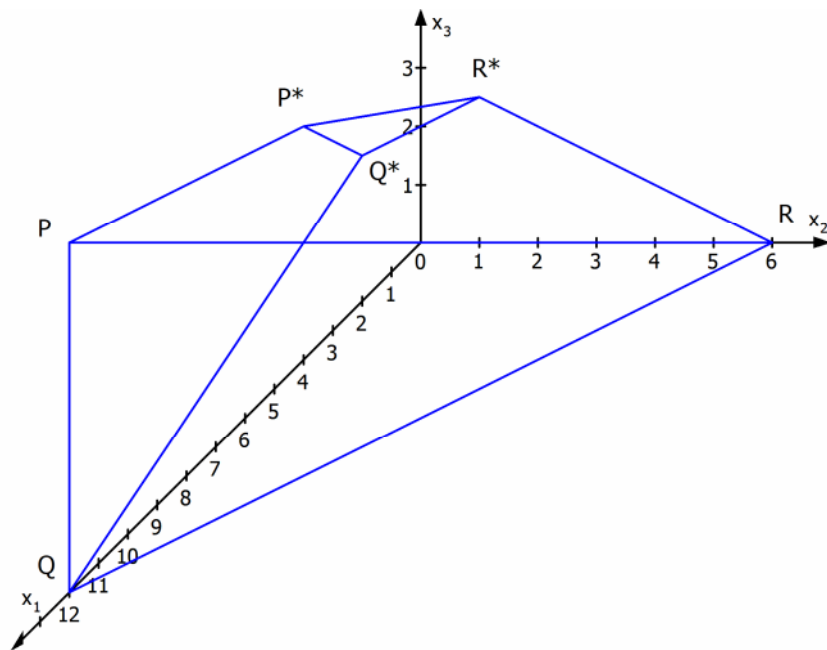
Wegen $f''(4,61) > 0$ existiert ein Minimum für $t = 4,61$.

Wegen $f(4,61) \approx 62,3$ ist der minimale Abstand $\sqrt{62,3} \approx 7,9$ km.

Hinweis: Die Extremstelle der Funktion $f(t)$ und der Funktion $\sqrt{f(t)}$ ist identisch.

Aufgabe 12-1: (abgewandelte Abituraufgabe 2009)

a) Stelle den Pyramidenstumpf in einem Koordinatensystem dar.



Begründe, dass die Deck- und die Grundfläche des Pyramidenstumpfs nicht parallel sind.

Die Punkte in der Grundfläche haben alle die x_3 -Koordinate 0.

Die Punkte der Deckfläche haben als x_3 -Koordinate 2 und 2,5.

Damit ist die Deckfläche nicht parallel zur $x_1 - x_2$ -Ebene.

Somit können die Deckfläche und Grundfläche nicht zueinander parallel sein.

Bestimme den Winkel, den die Kante QQ^* mit der x_1 -Achse bildet.

Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{QQ^*} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{QO} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{106,25} \cdot \sqrt{144}} = \frac{120}{\sqrt{106,25} \cdot \sqrt{144}} = 0,97 \Rightarrow \alpha \approx 14^\circ$$

Zeige, dass $S(0|0|3)$ die Spitze der ursprünglichen Pyramide ist.

Es ist zu zeigen, dass sich die Gerade g_1 durch Q und Q^* und die Gerade g_2 durch R und R^* in S schneiden.

Da in der Aufgabe steht, dass es sich bei dem ursprünglichen Körper um eine Pyramide handelt, muss nicht gezeigt werden, dass auch die Gerade durch P und P^* den Punkt S enthält.

$$\text{Gleichung von } g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -2,5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gleichung von } g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2,5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rclcl} 12 & +10r & = & 0 & \\ \text{Schnittpunkt der Geraden:} & 0 & = & 6 & +5s \\ & -2,5r & = & & -2,5s \end{array}$$

Aus dem Gleichungssystem folgt $r = s = -1,2$

$$\text{Einsetzen in die Gleichung } g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1,2 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt ist $S(0|0|3)$, was zu zeigen war.

b) Bestimme den Abstand des Punktes Q^* von der Geraden durch Q und R.

$$\text{Gleichung der Geraden h durch Q und R: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Laufender Punkt auf h: $L(12 - 12r \mid 6r \mid 0)$

$$\text{Bedingung: } \overrightarrow{Q^*L} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 10 - 12r \\ 6r \\ -2,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$-120 + 144r + 36r = 0 \Leftrightarrow r = \frac{2}{3}$$

Daraus ergibt sich als Lotfußpunkt $L(4|4|0)$.

Abstand von Q^* zur Geraden h: $|\overrightarrow{Q^*L}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2,5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 16 + 6,25} = \sqrt{26,25} \approx 5,12$

Zeige, dass die Seitenfläche QRR^*Q^* des Pyramidenstumpfs ein Trapez ist.

Ein Viereck ist ein Trapez, wenn ein Seitenpaar parallel zueinander ist.

Es gilt: $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{Q^*R^*} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Da die gegenüberliegenden Vektoren Vielfache zueinander sind, sind die Seiten QR und Q^*R^* zueinander parallel. Damit ist das Viereck QRR^*Q^* ein Trapez.

Berechne den Flächeninhalt dieses Trapezes.

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2} \cdot (|\overrightarrow{QR}| + |\overrightarrow{Q^*R^*}|) \cdot h_{\text{Trapez}}$$

$$|\overrightarrow{QR}| = \sqrt{144 + 36 + 0} = \sqrt{180} \quad \text{und} \quad |\overrightarrow{Q^*R^*}| = \sqrt{4 + 1 + 0} = \sqrt{5}$$

Außerdem gilt $h_{\text{Trapez}} = \sqrt{26,25}$ (Abstand von Q^* zur Gerade durch Q und R)

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{180} + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{26,25} \approx 40,1 \text{ Flächeneinheiten}$$

Aufgabe 12-2: (abgewandelte Abituraufgabe 2009)

Behauptung: $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{TC} = 0$

Voraussetzungen: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{9} \cdot \overrightarrow{OA}$$

$$|\overrightarrow{OA}| = 3 \cdot |\overrightarrow{OC}| \Rightarrow |\overrightarrow{OA}|^2 = 9 \cdot |\overrightarrow{OC}|^2 \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = 9 \cdot \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} \quad (*)$$

Nun gilt folgende Umformung:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{TC} &= (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) \cdot \left(-\frac{1}{9} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) = -\frac{1}{9} \cdot \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} - \frac{1}{9} \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} - \frac{1}{9} \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \end{aligned}$$

Aufgrund von (*) ergibt sich, dass sich die Terme am Schluss gegenseitig aufheben.

Damit ist gezeigt, dass die Strecken OB und TC orthogonal sind.

Aufgabe 13: (abgewandelte Abituraufgabe 2010)

a) Zeige, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig ist.

$$\text{Es gilt } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Für die Längen der Dreiecksseiten gilt:

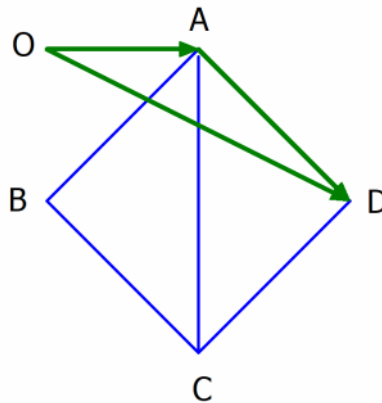
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0+16+4} = \sqrt{20}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16+16+0} = \sqrt{32}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{16+0+4} = \sqrt{20}$$

Da zwei der drei Dreiecksseiten gleich lang sind, ist das Dreieck ABC gleichschenkelig.

Ergänze das Dreieck ABC durch einen Punkt D zu einer Raute.



$$\text{Es gilt: } \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten von D lauten D(4|4|-2).

Berechne die Innenwinkel der Raute.

Berechnung des Winkels α (im Punkt A):

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{0+16+4} \cdot \sqrt{16+0+4}} = \frac{-4}{20} \Rightarrow \alpha \approx 101,53^\circ$$

Aufgrund der Symmetrie der Raute gilt $\gamma = \alpha = 101,53^\circ$ (Winkel im Punkt C)

Für die beiden anderen Winkel β (im Punkt B) und δ (im Punkt D) gilt

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ (Winkelsumme im Viereck)

und daher $\beta + \delta = 360^\circ - 2 \cdot 101,53^\circ = 156,94^\circ$

Da $\beta = \delta$ ist, folgt $\beta = \delta = \frac{156,94^\circ}{2} = 78,47^\circ$.

Zeige, dass die Raute in der Ebene E: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ liegt.

Der Nachweis erfolgt durch die Kontrolle, ob die 4 Punkte A, B, C, D in der Ebene E liegen.

Einsetzen der Koordinaten von A in E: $0 + 4 + 2 \cdot 0 = 4$ ist eine wahre Aussage.

Einsetzen der Koordinaten von B in E: $0 + 0 + 2 \cdot 2 = 4$ ist eine wahre Aussage.

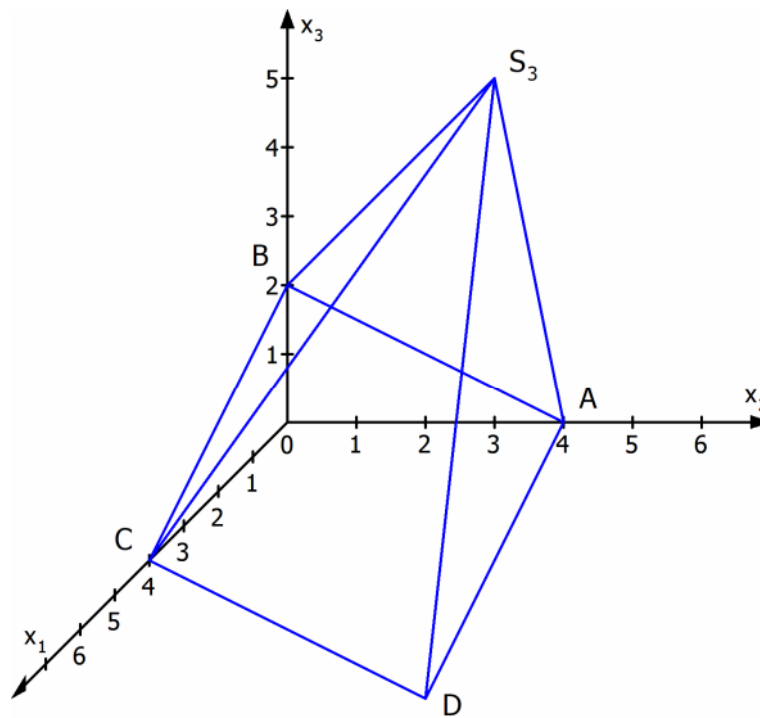
Einsetzen der Koordinaten von C in E: $4 + 0 + 2 \cdot 0 = 4$ ist eine wahre Aussage.

Einsetzen der Koordinaten von D in E: $4 + 4 + 2 \cdot (-2) = 4$ ist eine wahre Aussage.

Somit liegen alle 4 Punkte in der Ebene E.

b) Zeichne die Pyramide P_3 in ein Koordinatensystem.

Für die Pyramidenspitze gilt $S_3(6 | 6 | 8)$.



Bestimme eine Koordinatengleichung von F .

Aufstellen der Ebene F in Parameterform:

$$F: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{BD} + t \cdot \overrightarrow{BS_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{bzw. vereinfacht } F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenvektor von } F: \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. vereinfacht } \vec{n}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ansatz für Koordinatengleichung von F : $1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 = d$

Einsetzen von Punkt B in die Ebene: $1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = d \Rightarrow d = 0$

Koordinatengleichung von F : $1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 = 0$

Zeige, dass die Ebene F Symmetrieebene der Pyramide P_3 ist.

Die Ebene F enthält die Punkte B und D sowie die Pyramidenspitze S_3 .

Die Diagonale BD der Raute ist eine Symmetrieachse der Grundfläche.

Es ist daher nur noch zu zeigen, dass die Ebene F orthogonal zur Ebene E ist:

$$\text{Für die Normalenvektoren von E und F gilt: } \vec{n}_E \cdot \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Daraus folgt die Orthogonalität der Ebenen E und F.

Damit ist F Symmetrieebene der Pyramide P_3 .

- c) Für welchen Wert von t geht die Höhe der Pyramide P_t durch den Mittelpunkt der Grundfläche?

Berechnung des Mittelpunktes M der Grundfläche:

$$\vec{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{OA} + \vec{OC}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{also Mittelpunkt } M(2|2|0).$$

Aufstellen einer Gerade h, die orthogonal zur Grundfläche verläuft und durch M geht:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{Normalenvektor von E ist Richtungsvektor von h})$$

Kontrolle, für welchen Wert von t der Punkt S_t auf der Geraden h liegt:

$$\begin{pmatrix} -3+3t \\ -3+3t \\ 5+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dies ergibt folgendes lineares Gleichungssystem:

$$r - 3t = -5$$

$$r - 3t = -5$$

$$2r - t = 5$$

Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems lautet $r = 4$ und $t = 3$.

Für $t = 3$ geht die Höhe der Pyramide P_t durch den Mittelpunkt der Grundfläche.

In welchen Punkten durchstößt dabei seine Spitze die $x_1 - x_2$ - Ebene?

Durchstoßpunkte bei Drehung des Dreiecks ACS_3 :

Bei der Drehung des Dreiecks um die Achse AC wandert die Spitze S_3 auf der Symmetrieebene F. Die gesuchten Durchstoßpunkte befinden sich daher sowohl auf der $x_1 - x_2$ - Ebene als auch auf der Symmetrieebene F.

Ein Punkt, der auf der Symmetrieebene F und in der $x_1 - x_2$ -Ebene liegt hat die Koordinaten $Z(u|u|0)$.

Um den Wert von u zu ermitteln, wird noch eine weitere Bedingung benötigt. Der Mittelpunkt $M(2|2|0)$ hat vom Durchstoßpunkt Z dieselbe Entfernung wie von S_3 .

Daher gilt: $|\overrightarrow{MS_3}| = |\overrightarrow{MZ}|$.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u-2 \\ u-2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{16+16+64} = \sqrt{(u-2)^2 + (u-2)^2}$$

$$\sqrt{96} = \sqrt{2 \cdot (u-2)^2} \quad | \text{quadrieren}$$

$$\Rightarrow 96 = 2(u-2)^2 \Rightarrow u-2 = \pm\sqrt{48}$$

$$\Rightarrow u_1 = \sqrt{48} + 2 \approx 8,93 \text{ und } u_2 = -\sqrt{48} + 2 \approx -4,93$$

Mit einer Probe kann geprüft werden, dass die erhaltenen Ergebnisse auch Lösungen der Wurzelgleichung sind.

Die beiden gesuchten Durchstoßpunkte lauten $Z_1(8,93 | 8,93 | 0)$ und $Z_2(-4,93 | -4,93 | 0)$.

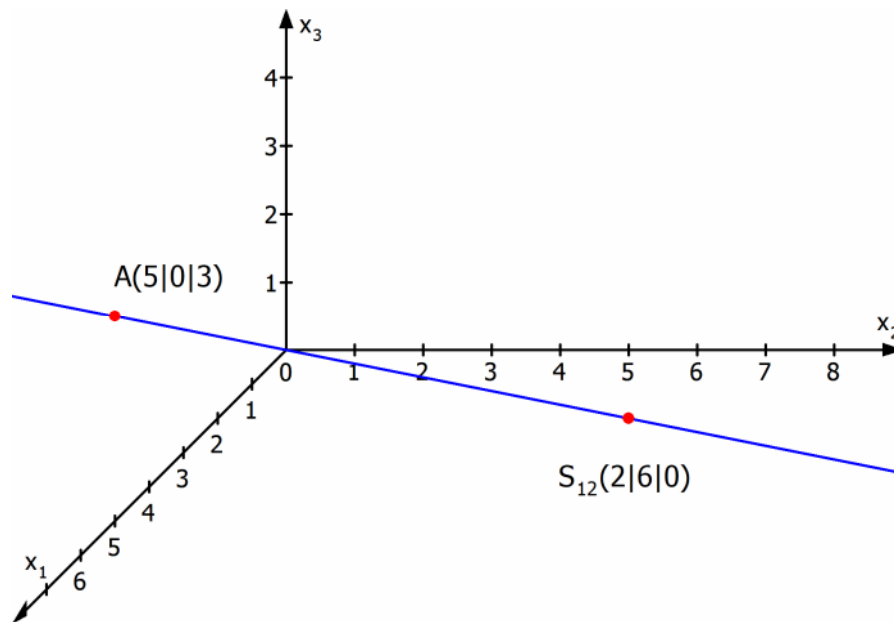
Aufgabe 14: (abgewandelte Abituraufgabe 2010)

a) Bestimme den Schnittpunkt der Geraden g mit der $x_1 - x_2$ -Ebene.

Setze in der Geradengleichung $x_3 = 0$: $3 + t = 0 \Rightarrow t = -3$

Einsetzen von $t = -3$ in die Geradengleichung ergibt $S_{12}(2|6|0)$

Zeichne die Gerade g in ein Koordinatensystem.



Unter welchem Winkel schneidet g die $x_1 - x_2$ -Ebene?

Die $x_1 - x_2$ -Ebene besitzt den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Berechnung des Winkels: } \sin \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1+4+1} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow \alpha \approx 24,1^\circ$$

Welcher Punkt F auf der Geraden g hat vom Punkt A den kleinsten Abstand?

Der Punkt F entspricht dem Fußpunkt des Lotes von A auf die Gerade g .

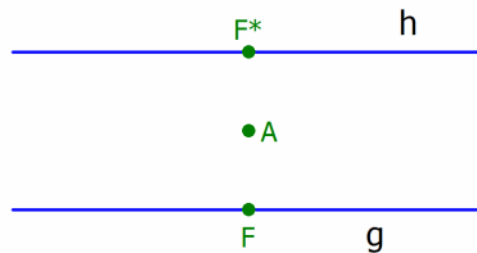
Allgemeiner Punkt auf g : $F(5+t|-2t|3+t)$

Bedingung: $\overrightarrow{AF} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0,5+t \\ -2t-6 \\ -0,5+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$$0,5+t+4t+12-0,5+t=0 \Leftrightarrow t=-2$$

Koordinaten von F: F(3|4|1)

Bestimme eine Gleichung von h.



Die Gerade h ist parallel zur Geraden g, somit hat sie denselben Richtungsvektor.

Nun müssen noch die Koordinaten von F* ermittelt werden, der sich aus der Spiegelung des Punktes F(3|4|1) am Punkt A ergibt.

$$\text{Es gilt } \overrightarrow{OF^*} = \overrightarrow{OF} + 2 \cdot \overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten von F* lauten F*(6|8|6).

$$\text{Geradengleichung von h: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Begründe, dass bei Rotation der Geraden g um die Gerade durch A und F eine Ebene entsteht.

Anhand der Skizze aus a) ergibt sich, dass der Punkt F auf der Geraden g liegt und die Gerade durch A und F orthogonal zur Geraden g ist.

Daher entsteht bei Rotation der Gerade g um die Gerade durch A und F eine Ebene.

Zeige, dass $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$ eine Gleichung dieser Ebene ist.

Die Ebene besitzt den Normalenvektor $\vec{n} = \overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 2,5 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{n}^* = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Nun muss noch geprüft werden, ob der Punkt F auf der gegebenen Ebene liegt:
Einsetzen von F(3|4|1) in die Ebenengleichung: $3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 30$ ist wahr

Damit ist $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$ eine Gleichung der Ebene.

Untersuche, ob die Punkte P(18|-9|1) und Q(-2|1|-9) auf verschiedenen Seiten dieser Ebene liegen.

Aufstellen einer Hilfsgerade k durch P und Q:

$$k: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 18 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Schnittpunktes von k mit E:

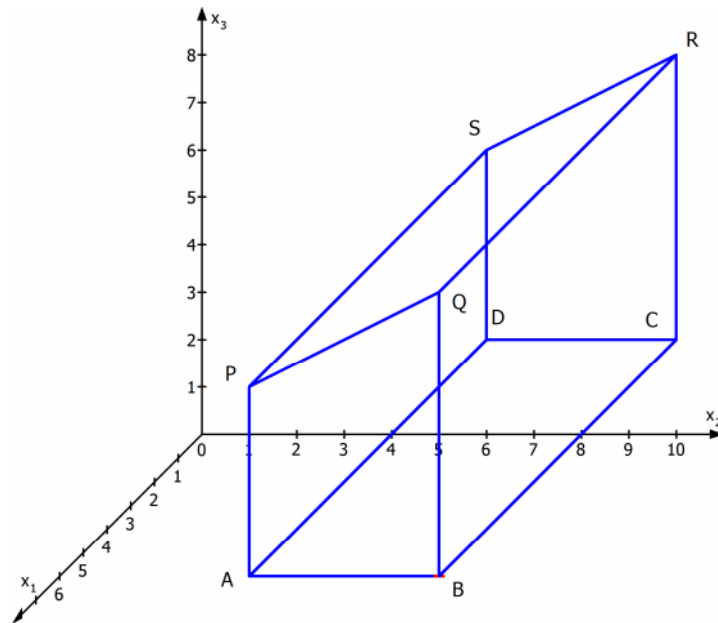
$$3 \cdot (18 - 20s) + 4 \cdot (-9 + 10s) + 5 \cdot (1 - 10s) = 30 \Leftrightarrow s = -0,1$$

Für den Schnittpunkt S gilt nun: $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} - 0,1 \cdot \overrightarrow{PQ}$

Da $s < 0$ ist, liegt der Punkt S nicht zwischen P und Q.
Somit liegen P und Q auf derselben Seite von E.

Aufgabe 15: (abgewandelte Abituraufgabe 2011)

a) Stelle die Truhe in einem Koordinatensystem dar.



Berechne das Volumen der Truhe.

Die Truhe ist ein Prisma mit der Grundfläche ABPQ (Trapez) und der Höhe $h = 10$.

$$\text{Fläche des Trapezes: } A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AP} + \overline{BQ}) \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot (4 + 6) \cdot 4 = 20$$

$$\text{Volumen der Truhe} = A_{\text{Trapez}} \cdot h_{\text{Prisma}} = 20 \cdot 10 = 200 \text{ Volumeneinheiten}$$

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, in welcher der Deckel der Truhe liegt.

Koordinatengleichung der Ebene PQRS:

$$\text{Parameterform der Ebene: } E_{\text{Deckel}} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenvektor: } \vec{n} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ -40 \end{pmatrix} \text{ bzw. vereinfacht } \vec{n}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ansatz Koordinatengleichung von E: } x_2 - 2x_3 = d$$

Einsetzen von $P(6|4|4)$: $4 - 8 = d \Leftrightarrow d = -4$

Koordinatengleichung von E: $x_2 - 2x_3 = -4$

- b) *Zeige, dass die Ebene, in der der Deckel liegt, und die Ebene, in der die Rückwand BCRQ liegt, zur Ebenenschar gehören.*

Die Deckelebene $E_{\text{Deckel}} : x_2 - 2x_3 = -4$ erhält man für den Wert $a = 2$.

Die Rückwand BCRQ ist eine Parallele zur $x_1 - x_3$ -Ebene und besitzt die Koordinatengleichung $E_{\text{Rückwand}} : x_2 = 8$

Die Rückwandebene erhält man aus der Ebenenschar für den Wert $a = 0$.

Zeige, dass es eine Gerade gibt, die in allen Ebenen E_a der Schar liegt.

Um nachzuweisen, dass es eine Gerade gibt, die in allen Ebenen der Schar liegt, wird zunächst die Schnittgerade zweier beliebiger Ebenen der Schar bestimmt. Da bereits bekannt ist, dass die Deckelebene PQRS für $a = 2$ zur Schar gehört und ebenso die Rückwandebene BCQR für $a = 0$, ergibt sich daraus anschaulich, dass sich diese beiden Ebenen in der Gerade durch Q und R schneiden.

Parameterform der Gerade g durch Q und R: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nun ist zu prüfen, ob diese Gerade auch auf allen anderen Ebenen der Schar liegt.

Schnitt von g mit der Ebenenschar E_a : $8 - a \cdot 6 = 8 - 6a$

Diese Gleichung ist für alle Werte von a wahr.

Somit liegt die Gerade g in allen Scharebenen.

Berechne den Schnittwinkel φ von E_0 und E_2 .

$$\cos \varphi = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \varphi \approx 63,4^\circ$$

Welche andere Ebene E_a schließt mit der Ebene E_2 ebenfalls den Winkel φ ein?

$$\cos(63,4^\circ) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{|1+2a|}{\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow |1+2a| = \sqrt{1+a^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Quadrieren der Gleichung: } (1+2a)^2 &= 1+a^2 \Leftrightarrow 3a^2 + 4a = 0 \\ &\Leftrightarrow a \cdot (3a + 4) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt: } a = 0 \text{ und } a = -\frac{4}{3}$$

Da $a = 0$ nicht der gesuchte Wert ist ist die gesuchte Ebene $E_{-\frac{4}{3}}$

c) In welcher Ebene E_a liegt der Deckel dann?

Aus Teilaufgabe b) ergibt sich, dass die Deckelebene PQRS der Scharebene E_2 entspricht.

Gesucht ist nun die Ebene E_a , die orthogonal zur Ebene E_2 ist.

Die Normalenvektoren der Ebenen müssen zueinander orthogonal sein.

$$\text{Bedingung: } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 1+2a = 0 \Rightarrow a = -0,5$$

Der Deckel liegt nach der Öffnung in der Ebene $E_{-0,5}$.

Bestimme die Koordinaten von P^* .

Der Punkt P^* liegt auf der Geraden g durch Q , die senkrecht zur Ebene E_2 verläuft.

$$\text{Gleichung von } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(Richtungsvektor von g ist Normalenvektor von E_2)

Da P^* auf g liegt, gilt für die Koordinaten $P^*(6 | 8+r | 6-2r)$

Weiterhin gilt $|\overline{PQ}| = |\overline{P^*Q}|$.

$$|\overrightarrow{PQ}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0+16+4} = \sqrt{20} \quad \text{und} \quad |\overrightarrow{P^*Q}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 2r \end{pmatrix} \right| = \sqrt{r^2+4r^2} = \sqrt{5r^2}$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{5r^2} \Rightarrow 5r^2 = 20 \Rightarrow r = \pm 2$$

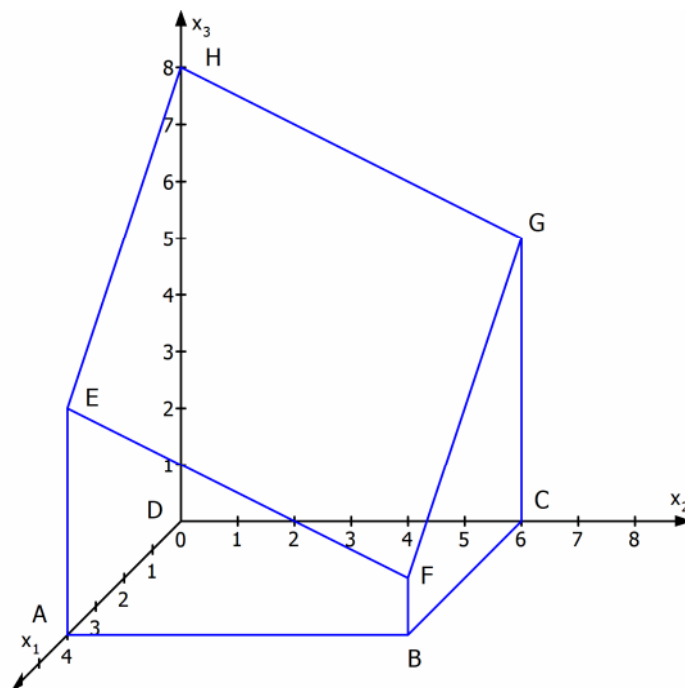
Für $r = 2$ ergäbe sich $P^*(6|10|2)$.

Für $r = -2$ ergäbt sich $P^*(6|6|10)$.

Da P^* oberhalb von P liegen muss (und damit der x_3 -Wert größer als 4 sein muss) ist der gesuchte Punkt $P^*(6|6|10)$.

Aufgabe 16: (abgewandelte Abituraufgabe 2011)

a) Stelle das Gebäude in einem Koordinatensystem dar.



Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Dachfläche EFGH liegt.

$$E_{\text{Dach}} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenvektor } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix} \text{ bzw. vereinfacht } \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ansatz Koordinatengleichung: $E_{\text{Dach}} : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = d$

Einsetzen von Punkt E(4|0|4): $d = 16$

Koordinatengleichung: $E_{\text{Dach}} : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 16$

Welchen Neigungswinkel besitzt die Dachfläche?

Winkel zwischen der Dachfläche und der $x_1 - x_2$ -Ebene:

$$\cos \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{1}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha \approx 48,2^\circ$$

Zeige, dass die Dachfläche ein Parallelogramm ist.
Berechne den Inhalt der Dachfläche.

Die Dachfläche EFGH ist ein Parallelogramm, wenn $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ gilt.

Es gilt $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{HG}$. Somit ist das Viereck EFGH ein Parallelogramm.

Die Parallelogrammfläche ergibt sich mit der Formel $A = |\overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EH}|$

$$\overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EH}| = \sqrt{24^2 + 12^2 + 24^2} = 36$$

Die Fläche des Parallelogramms beträgt 36 m^2 .

b) Bestimme d.

Die Lampe L(d|d|d) hat vom Boden den Abstand d (x_3 – Wert).

Der Abstand von L zu E_{Dach} muss damit auch d sein.

$$\text{HNF von } E_{\text{Dach}}: \frac{2x_1 + x_2 + 2x_3 - 16}{3} = 0$$

$$\text{Einsetzen von L in die HNF: } d(L, E_{\text{Dach}}) = \left| \frac{2d + d + 2d - 16}{3} \right| = \left| \frac{5d - 16}{3} \right|$$

$$\text{Bedingung: } \left| \frac{5d - 16}{3} \right| = d$$

$$1.\text{Fall: } \frac{5d - 16}{3} = d \Rightarrow d = 8$$

$$2.\text{Fall: } \frac{5d - 16}{3} = -d \Rightarrow d = 2$$

Da der Punkt L(8|8|8) außerhalb des Gebäudes liegt, kommt nur L(2|2|2) in Frage.

c) *Wie weit muss sie mindestens gehen, damit sie die Ecke H sehen kann?*

Das Auge der Person befindet sich im Punkt $R(5|1|1,7)$.

Die Augen der Person bewegen sich auf der Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1,7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der Grenzpunkt, bis zu dem die Person laufen muss, damit sie H sehen kann, ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Gerade h mit E_{Dach} :

$$2 \cdot 5 + 1 + t + 2 \cdot 1,7 = 16 \Rightarrow t = 1,6$$

Der Schnittpunkt lautet $S(5|2,6|1,7)$.

Die Person muss vom Punkt $P(5|1|1,7)$ bis zum Punkt $S(5|2,6|1,7)$ laufen, um den Punkt H zu sehen.

Sie muss also mindestens 1,6 m weit gehen.

Aufgabe 17: (abgewandelte Abituraufgabe 2012)

a) Bestimme eine Koordinatengleichung von E.

Parameterform von E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2,5 \end{pmatrix}$

Normalenvektor von E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ bzw. vereinfacht $\vec{n}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ansatz Koordinatengleichung: E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = d$

Einsetzen des Punktes A(6|1|0) ergibt $6 + 2 + 0 = d \Rightarrow d = 8$

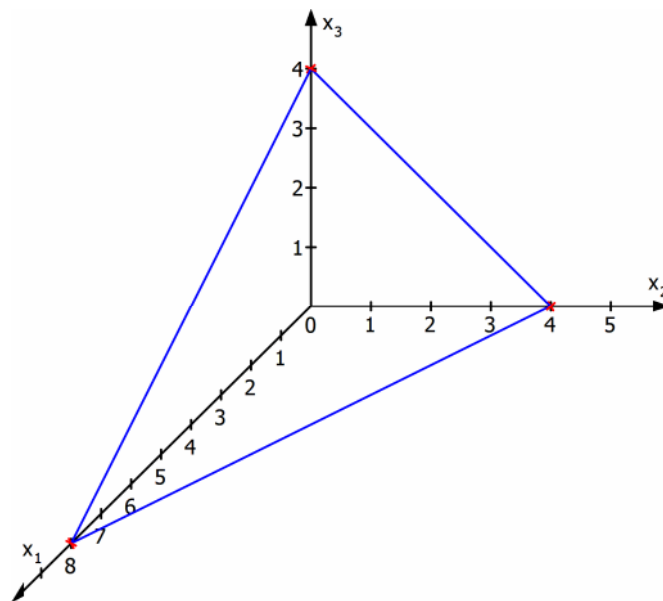
Koordinatengleichung von E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8$.

Stelle die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.

Schnittpunkt mit der x_1 -Achse: $S_1(x_1 | 0 | 0) \Rightarrow S_1(8 | 0 | 0)$

Schnittpunkt mit der x_2 -Achse: $S_2(0 | x_2 | 0) \Rightarrow S_2(0 | 4 | 0)$

Schnittpunkt mit der x_3 -Achse: $S_3(0 | 0 | x_3) \Rightarrow S_3(0 | 0 | 4)$



Unter welchem Winkel schneidet E die x_1 -Achse?

Die x_1 -Achse besitzt den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\sin \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha \approx 19,47^\circ$$

b) Zeige, dass das Dreieck ABP gleichschenkelig ist.

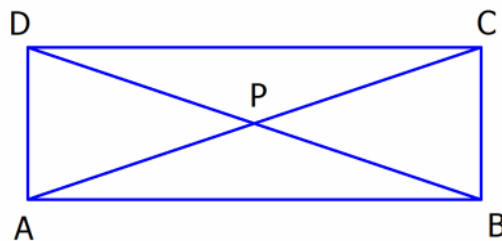
Um die Gleichschenkligkeit zu beweisen, werden die Längen der Dreiecksseiten berechnet:

$$\overline{AB} = |\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \quad \overline{AP} = |\overline{AP}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2,5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9+1+6,25} = \sqrt{16,25}$$

$$\overline{BP} = |\overline{BP}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2,5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+9+6,25} = \sqrt{16,25}$$

Da $\overline{AP} = \overline{BP}$ ist, ist das Dreieck ABP gleichschenkelig.

Das Viereck ABCD ist ein Rechteck mit Diagonalschnittpunkt P. Bestimme die Koordinaten der Punkte C und D.



$$\text{Punkt C: } \overline{OC} = \overline{OA} + 2 \cdot \overline{AP} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ also C(0|-1|5)}$$

$$\text{Punkt D: } \overline{OD} = \overline{OB} + 2 \cdot \overline{BP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ also D(4|-3|5)}$$

Berechne die Koordinaten der Spitzen dieser Pyramiden.

Die Spitzen S und S* der Pyramiden liegen senkrecht über bzw. unter dem Mittelpunkt P der Grundfläche ABCD und haben von P den Abstand 12.

$$\text{Normalenvektor von E: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normaleneinheitsvektor von E: } \vec{n}_0 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + 12 \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} + 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10,5 \end{pmatrix} \text{ also } S(7|8|10,5)$$

$$\overrightarrow{OS^*} = \overrightarrow{OP} - 12 \cdot \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} - 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -5,5 \end{pmatrix} \text{ also } S^*(-1|-8|-5,5)$$

c) Welche Punkte der x_1 -Achse bilden jeweils mit A und B ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse AB?

Ein allgemeiner Punkt auf der x_1 -Achse besitzt die Koordinaten $W(w|0|0)$.
Da AB die Hypotenuse darstellt, ist im Punkt W der rechte Winkel.

$$\text{Bedingung: } \overrightarrow{AW} \cdot \overrightarrow{BW} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} w-6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w-2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(w-6)(w-2)+3=0 \Leftrightarrow w^2-8w+15=0 \Rightarrow w_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2}$$

Daraus folgt $w = 5$ oder $w = 3$.

Es gibt zwei Punkte: $W(5|0|0)$ oder $W(3|0|0)$.

d) *Untersuche, ob der Punkt $R(2|2|3)$ innerhalb des Kegels liegt.*

Da der x_3 -Wert von R zwischen 0 und 12 liegt, könnte er innerhalb des Kegels liegen.

Ob er tatsächlich innerhalb liegt, wird nun folgendermaßen geprüft:

Der Grundkreis liegt in der $x_1 - x_2$ -Ebene (dies ist daran erkennbar, dass der Ursprung M den Mittelpunkt darstellt und die Strecke von M nach S senkrecht zum Grundkreis verläuft).

Nun wird die Gleichung der Gerade g aufgestellt, die R und S enthält:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Schnittpunktes P von g mit der $x_1 - x_2$ -Ebene:

Liegt P innerhalb des Grundkreises, dann liegt R auch innerhalb des Kegels.

Liegt P auf dem Grundkreis, würde R auf dem Kegelmantel liegen.

Liegt P außerhalb des Grundkreises, liegt R auch außerhalb des Kegels.

Schnitt von g mit der $x_1 - x_2$ -Ebene:

$$\text{Setze } x_3 = 0 : 12 - 9t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3}$$

Einsetzen des t-Wertes in die Gerade ergibt den Schnittpunkt $P(\frac{8}{3} | \frac{8}{3} | 0)$.

$$\text{Abstand von P zum Mittelpunkt } M(0|0|0): \overline{PM} = |\overrightarrow{PM}| = \sqrt{\frac{64}{9} + \frac{64}{9}} \approx 3,77 < 4$$

Damit liegt P innerhalb des Grundkreises und folglich liegt der Punkt R auch innerhalb des Kegels.

Aufgabe 18: (abgewandelte Abituraufgabe 2012)

a) Wie weit bewegt sich U_1 in einer Minute?

Das Boot U_1 ändert sich pro Minute um den Vektor $\begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ -30 \end{pmatrix}$.

$$\left| \begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ -30 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3600 + 8100 + 900} = \sqrt{12600} \approx 112,25 \text{ Meter.}$$

Pro Minute bewegt sich das Boot U_1 112,25 Meter weit.

Woran erkennt man, dass sich U_1 von der Meeresoberfläche wegbewegt?

Da die x_3 -Koordinate des Richtungsvektor negativ ist ($x_3 = -30$), bewegt sich das Boot U_1 von der Meeresoberfläche weg.

Welchen Winkel bildet die Route von U_1 mit der Meeresoberfläche?

Die Meeresoberfläche entspricht der $x_1 - x_2$ -Ebene mit Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\sin \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ -30 \end{pmatrix} \right|}{1 \cdot \sqrt{12600}} = \frac{30}{\sqrt{12600}} \Rightarrow \alpha \approx 15,5^\circ$$

b) Berechne die Geschwindigkeit von U_2 in $\frac{\text{m}}{\text{min}}$.

$$\text{Abstand von A zu B: } |\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -270 \\ -540 \\ -180 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{270^2 + 540^2 + 180^2} = 630 \text{ Meter}$$

Das Boot U_2 bewegt sich in 3 Minuten 630 Meter.

Die Geschwindigkeit beträgt $v = 210 \frac{\text{m}}{\text{min}}$

Begründe, dass sich die Position von U_2 zum Zeitpunkt t beschreiben lässt durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 68 \\ 135 \\ -68 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -90 \\ -180 \\ -60 \end{pmatrix}.$$

Der Startpunkt $A(68|135|-68)$ entspricht dem Ortsvektor der Gerade.

Der Richtungsvektor entspricht dem Vektor $\frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$ und stellt die Richtung dar, in die sich das Boot in einer Minute bewegt.

Zu welchem Zeitpunkt befinden sich beide U-Boote in gleicher Tiefe?

Damit sich beide U-Boote in gleicher Tiefe befinden, müssen die x_3 -Koordinate gleich groß sein: $-170 - 30t = -68 - 60t \Leftrightarrow t = 3,4$

Nach 3,4 Minuten befinden sich beide U-Boote in gleicher Tiefe.

c) Welchen Abstand haben die beiden U-Boote zu Beobachtungsbeginn?

Die Boote befinden sich zu Beginn in den Punkten $C(140|105|-170)$ und $A(68|135|-68)$.

$$\text{Es gilt } |\overrightarrow{AC}| = \left| \begin{pmatrix} 72 \\ -30 \\ -102 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{72^2 + 30^2 + 102^2} \approx 128,4 \text{ Meter.}$$

Wird dieser Sicherheitsabstand eingehalten?

Um die Einhaltung des Sicherheitsabstandes zu prüfen, muss der kürzeste Abstand der beiden Boote berechnet werden.

Das Boot U_1 befindet sich im Zeitpunkt t im Punkt $M_t(140 - 60t | 105 - 90t | -170 - 30t)$.

Das Boot U_2 befindet sich im Zeitpunkt t im Punkt $N_t(68 - 90t | 135 - 180t | -68 - 60t)$.

Der Abstand der U-Boote zum Zeitpunkt t beträgt

$$|\overrightarrow{M_t N_t}| = \left| \begin{pmatrix} -72 - 30t \\ 30 - 90t \\ 102 - 30t \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-72 - 30t)^2 + (30 - 90t)^2 + (102 - 30t)^2}$$

Nun ist t so zu wählen, dass der Abstand minimal wird.

Hierzu betrachtet man die Funktion $f(t) = (-72 - 30t)^2 + (30 - 90t)^2 + (102 - 30t)^2$

Gesucht ist die Extremstelle von f :

$$f'(t) = 2(-72 - 30t) \cdot (-30) + 2(30 - 90t) \cdot (-90) + 2(102 - 30t) \cdot (-30)$$

$$f'(t) = 19800t - 7200$$

$$f''(t) = 19800$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 19800t - 7200 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{11} \approx 0,36$$

Wegen $f''(0,36) > 0$ existiert ein Minimum für $t = 0,36$.

Wegen $f(\frac{4}{11}) \approx 15179$ ist der minimale Abstand $\sqrt{15179} \approx 123,2$ Meter

Der Sicherheitsabstand wird eingehalten.

Hinweis: Die Extremstelle der Funktion $f(t)$ und der Funktion $\sqrt{f(t)}$ ist identisch.

c) *Wie groß ist der Höhenunterschied der zwei Routen an dieser Stelle?*

Da die Tiefe der Strecken keine Rolle spielen, muss man die x_3 -Koordinaten zunächst weglassen.

Der Schnittpunkt der Strecken ergibt sich durch gleichsetzen der ersten beiden Zeilen der Geradengleichungen (mit unterschiedlichen Parametern t und s):

$$140 - 60t = 68 - 90s$$

$$105 - 90t = 135 - 180s$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet $t = \frac{29}{5}$ und $s = \frac{46}{15}$.

Die x_3 -Koordinaten von U_1 lautet $x_3 = -170 - 30 \cdot \frac{29}{5} = -344$ Meter

Die x_3 -Koordinaten von U_2 lautet $x_3 = -68 - 60 \cdot \frac{46}{15} = -252$ Meter

Der Höhenunterschied beträgt 92 Meter.

Aufgabe 19: (abgewandelte Abituraufgabe 2013)

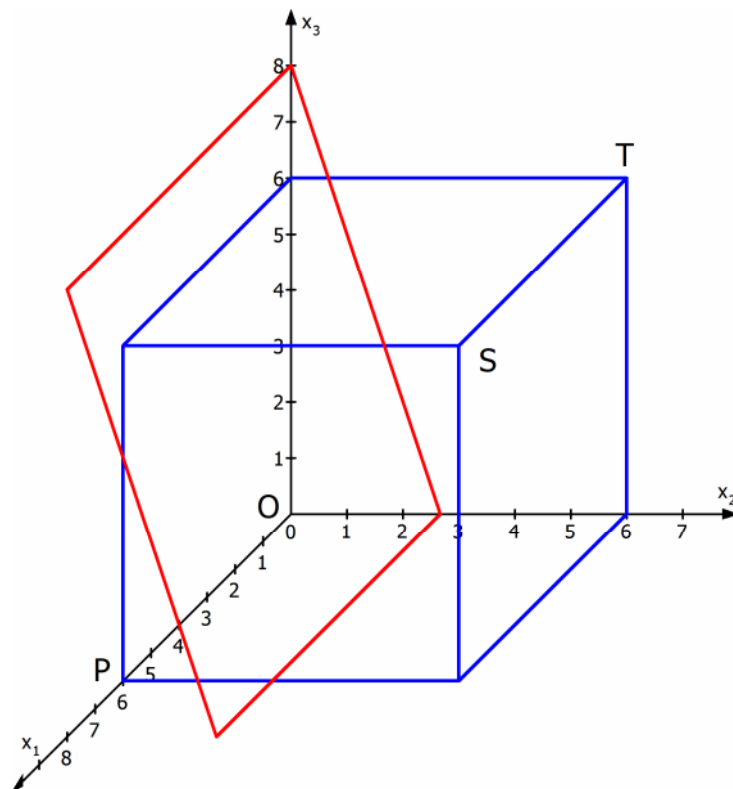
a) Stelle den Würfel und die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.

Spurpunkte der Ebene:

Da in der Koordinatengleichung die Variable x_1 nicht vorkommt, ist die Ebene E parallel zur x_1 -Achse.

Schnittpunkt mit x_2 -Achse: $S_{x_2}(0 | x_2 | 0) \Rightarrow S_{x_2}(0 | \frac{8}{3} | 0)$

Schnittpunkt mit x_3 -Achse: $S_{x_3}(0 | 0 | x_3) \Rightarrow S_{x_3}(0 | 0 | 8)$



Berechne den Winkel, den die Ebene E mit der $x_1 - x_2$ -Ebene einschließt.

Die $x_1 - x_2$ -Ebene besitzt den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Für den Winkel gilt: } \cos \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Daraus folgt $\alpha \approx 71,6^\circ$

Bestimme den Abstand von E zur x_1 -Achse.

Die x_1 -Achse ist parallel zu E.

Der Abstand von E zur x_1 -Achse entspricht dem Abstand eines beliebigen Punktes A auf der x_1 -Achse von der Ebene E.

Als Punkt A wird der Ursprung A(0/0/0) festgelegt.

Hessesche Normalenform von E: $\frac{3x_2 + x_3 - 8}{\sqrt{10}} = 0$

Einsetzen von A in die HNF von E: $d(A,E) = \left| \frac{3 \cdot 0 + 0 - 8}{\sqrt{10}} \right| = \frac{8}{\sqrt{10}} \approx 2,53$

Die Ebene E hat von der x_1 -Achse den Abstand 2,53.

b) Welche Lage haben die Ebenen der Schar zueinander?

Alle Ebenen der Schar besitzen den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Da der Normalenvektor unabhängig von a ist, sind alle Ebenen der Schar zueinander parallel.

Für welche Werte von a hat der Punkt S(6|6|6) den Abstand $\sqrt{10}$ von der Ebene E_a ?

HNF von E_a : $\frac{3x_2 + x_3 - a}{\sqrt{10}} = 0$

$d(S, E_a) = \left| \frac{3 \cdot 6 + 6 - a}{\sqrt{10}} \right| = \left| \frac{24 - a}{\sqrt{10}} \right|$

Bedingung: $\left| \frac{24 - a}{\sqrt{10}} \right| = \sqrt{10}$

Fall 1: $\frac{24 - a}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow 24 - a = 10 \Leftrightarrow a = 14$

Fall 2: $\frac{24 - a}{\sqrt{10}} = -\sqrt{10} \Leftrightarrow 24 - a = -10 \Leftrightarrow a = 34$

Für welche Werte von a hat die Ebene E_a gemeinsame Punkte mit dem Würfel?

Aus der Skizze in a) ergibt sich, dass es zwei Grenzlagen für die parallele Ebenenschar gibt, in der die Ebene mit dem Würfel jeweils eine nur eine Würfelkante gemeinsam haben.

Grenzlage 1:

Die Ebene hat mit dem Würfel die Kante von $O(0|0|0)$ bis $P(6|0|0)$ gemeinsam.

Einsetzen der Koordinaten von O (oder P) in die Ebenenschar: $3 \cdot 0 + 0 = a$

$$\Rightarrow a = 0$$

Grenzlage 2:

Die Ebene hat mit dem Würfel die Kante von $T(0|6|6)$ bis $S(6|6|6)$ gemeinsam.

Einsetzen der Koordinaten von T (oder S) in die Ebenenschar: $3 \cdot 6 + 6 = a$

$$\Rightarrow a = 24$$

Das heißt, dass für alle Werte von a mit $0 \leq a \leq 24$ die Ebene gemeinsame Punkte mit dem Würfel besitzt.

Aufgabe 20: (abgewandelte Abituraufgabe 2013)

a) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene S, in der das Segeltuch liegt.

Die Ebene S enthält die Punkte $F(8|8|8)$, $M_1(8|0|4)$ und $M_2(4|0|8)$.

$$\text{Parametergleichung der Ebene: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenvektor: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \cdot 0 - (-8) \cdot (-4) \\ -4 \cdot (-4) - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-8) - (-4) \cdot (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \\ 16 \\ -32 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{n}^* = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ansatz für die Koordinatengleichung von S: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = d$.

Einsetzen des Punktes $F(8|8|8)$ ergibt $2 \cdot 8 - 8 + 2 \cdot 8 = 24 = d$,

Koordinatengleichung von S: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 24$

Zeige, dass das Segeltuch die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat.

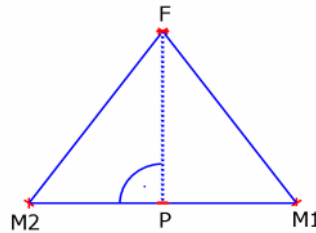
Das Dreieck M_1FM_2 ist gleichschenkelig, wenn zwei der drei Seiten gleich lang sind.

$$\text{Länge von } M_1F: |\overrightarrow{M_1F}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + 8^2 + 4^2} = \sqrt{80}$$

$$\text{Länge von } M_2F: |\overrightarrow{M_2F}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 8^2 + 0^2} = \sqrt{80}$$

Da $|\overrightarrow{M_1F}| = |\overrightarrow{M_2F}|$ ist, ist das Dreieck M_1FM_2 gleichschenkelig.

Berechne den Flächeninhalt des Segeltuchs.



$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{M_1 M_2} \cdot \overline{PF} \quad \left| \overline{M_1 M_2} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{32}$$

Der Mittelpunkt P der Strecke $\overline{M_1 M_2}$ besitzt die Koordinaten P(6|0|6)

$$\left| \overline{PF} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 8^2 + 2^2} = \sqrt{72}$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{32} \cdot \sqrt{72} = 24$$

Die Fläche des Segeltuches beträgt 24 m².

Welchen Abstand hat das Segeltuch von der Ecke E?

Der Abstand des Segeltuches von der Ecke E entspricht dem Abstand der Ebene S vom Punkt E(8|0|8).

$$\text{HNF von S: } \frac{2x_1 - x_2 + 2x_3 - 24}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{2x_1 - x_2 + 2x_3 - 24}{3} = 0$$

$$d(E, S) = \left| \frac{2 \cdot 8 - 0 + 2 \cdot 8 - 24}{3} \right| = \frac{8}{3} \approx 2,67$$

Das Segeltuch ist etwa 2,67 Meter von der Ecke E entfernt.

b) In welchem Punkt befindet sich das untere Ende der Stange?

$$\text{Gleichung der Gerade durch A(8|0|0) und C(0|8|0) : } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese Gerade wird nun parallel um 6 nach oben verschoben.
Dies erreicht man damit, dass der Richtungsvektor gleichbleibt und beim Ortsvektor die x_3 -Koordinate um 6 erhöht wird.

$$\text{Parallele Gerade zu AC: } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt von h mit der Ebene S:

$$2(8 - 8t) - 8t + 2 \cdot 6 = 24 \quad \Leftrightarrow 16 - 16t - 8t + 12 = 24 \quad \Leftrightarrow t = \frac{1}{6}$$

Einsetzen von t in die Gerade h ergibt den Schnittpunkt $L(\frac{20}{3} | \frac{4}{3} | 6)$

Das untere Ende der Stange befindet sich im Punkt $Z(\frac{20}{3} | \frac{4}{3} | 0)$.

Aufgabe 21: (abgewandelte Abituraufgabe 2014)

a) Bestimme eine Koordinatengleichung von E.

Die Parametergleichung der Ebene, in der die Punkte B, C und S liegen, ist

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenvektor von E: } \vec{n} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 120 \\ 50 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{n}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ansatz für die Koordinatengleichung von E: $12x_2 + 5x_3 = d$

Einsetzen von B(5|5|0): $12 \cdot 5 + 5 \cdot 0 = 60 = d$

Koordinatengleichung von E: $12x_2 + 5x_3 = 60$

Berechne den Winkel, der von der Seitenfläche BCS und der Grundfläche der Pyramide eingeschlossen wird.

$$\text{Normalenvektor der } x_1 - x_2 \text{-Ebene: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{144 + 25} \cdot \sqrt{1}} = \frac{5}{13} \Rightarrow \alpha \approx 67,4^\circ$$

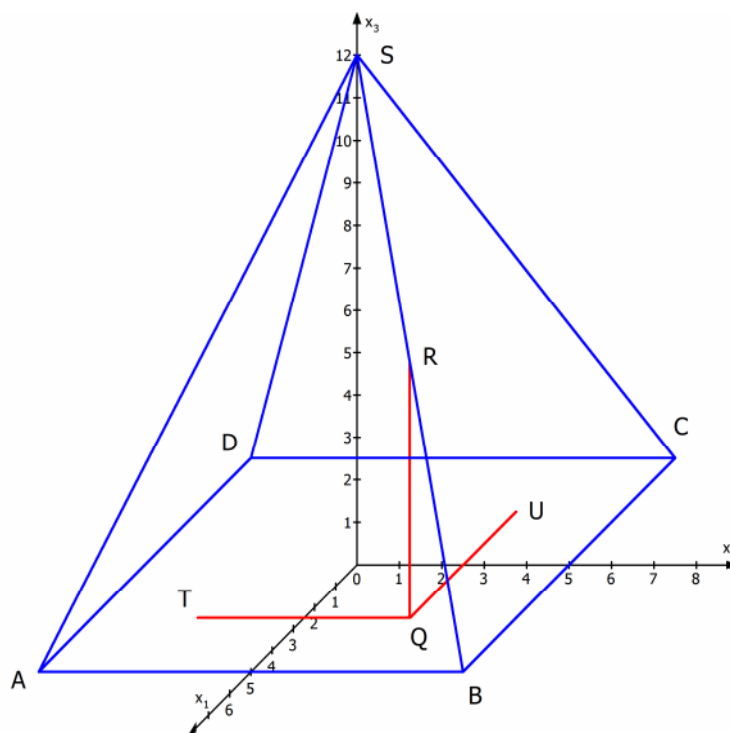
Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks BCS.

$$\text{Es gilt } A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS}|$$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 120 \\ 50 \end{pmatrix} \quad |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 120 \\ 50 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{14400 + 2500} = 130.$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 130 = 65 \text{ FE}$$

b) *Berechne sein Volumen.*



Aufgrund der Skizze ergeben sich neben $Q(2,5|2,5|0)$ als weitere Quadereckpunkte $T(2,5|-2,5|0)$ und $U(-2,5|2,5|0)$.

Die Länge und die Breite des Quaders sind jeweils 5 LE.

Für die Höhe des Quaders benötigt man die Koordinaten des Punktes $R(2,5|2,5|?)$, der auf der Geraden durch B und S liegt.

Gleichung der Gerade g durch B und S: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$

Punktprobe mit R: $\begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$ daraus folgt $s = 0,5$ und $x_3 = 6$

Mit $R(2,5|2,5|6)$ ist die Höhe des Quaders $h = 6$.

$$V_{\text{Quader}} = 5 \cdot 5 \cdot 6 = 150 \text{ VE}$$

Welche Koordinaten hat dessen Eckpunkt auf der Kante BS?

Der Quader ist dann ein Würfel, wenn der Eckpunkt R die Koordinaten $R(x|x|2x)$ besitzt.

Einsetzen von R in g:
$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

3.Zeile: $2x = 12s \Leftrightarrow x = 6s$

2.Zeile: $6s = 5 - 5s \Leftrightarrow s = \frac{5}{11}$ und damit $x = \frac{30}{11}$

Der gesuchte Eckpunkt R des Würfels hat die Koordinaten $R(\frac{30}{11} | \frac{30}{11} | \frac{60}{11})$.

Aufgabe 22: (abgewandelte Abituraufgabe 2014)

a) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E , in der die Platte liegt.

Die Parametergleichung der Ebene, in der die Punkte A, B und C liegen, ist

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

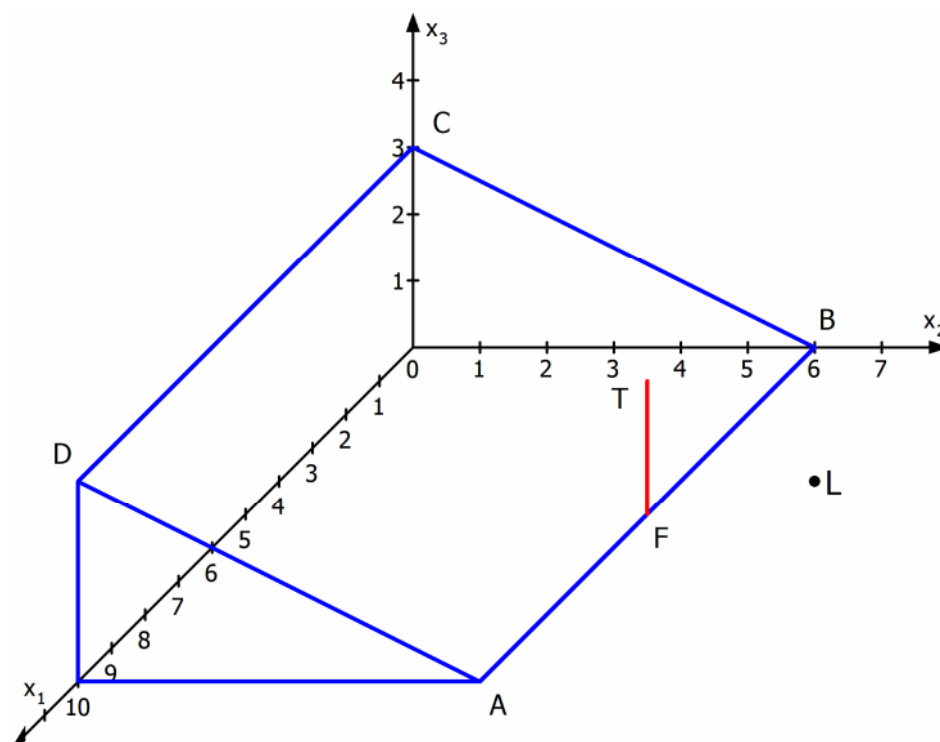
$$\text{Normalenvektor von } E: \vec{n} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{n}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ansatz für die Koordinatengleichung von E : $x_2 + 2x_3 = d$

Einsetzen von $A(10/6/0)$ in die Koordinatengleichung: $6 + 2 \cdot 0 = 6 = d$

Koordinatengleichung von E : $x_2 + 2x_3 = 6$

Stelle die Platte, den Stab und die Lichtquelle in einem Koordinatensystem dar.



Berechne den Winkel zwischen dem Stab und der Platte.

$$\text{Es gilt } \overrightarrow{FT} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\sin \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{5} \cdot 2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha \approx 63,4^\circ$$

b) Bestimme den Schattenpunkt des oberen Endes des Stabes.

Das obere Ende des Stabes ist der Punkt T(5|6|2).

Zur Berechnung des Schattenpunktes von T wird eine Gerade g durch L(8/10/2) und T aufgestellt.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt der Ebene E mit g liefert den Schattenpunkt T*:
 $10 - 4s + 2 \cdot 2 = 6 \Leftrightarrow s = 2$

Einsetzen von $s = 2$ in g: T*(2|2|2)

Begründe, dass der Schatten vollständig auf der Platte liegt.

Der Punkt T* liegt als Schnittpunkt von g und E in der Ebene E.

Zu begründen ist, dass T* innerhalb des Rechtecks ABCD liegt.

Die x_1 -Koordinate von T* liegt zwischen den x_1 -Koordinaten von A und B.

Die x_2 -Koordinate von T* liegt zwischen den x_2 -Koordinaten von B und C.

Damit liegt T* innerhalb des Rechtecks ABCD (also auf der Platte).

Der Schattenpunkt von F ist F*. Da F auf der Platte liegt, stimmen F und F* überein.

Da sich die Schattenpunkte T* und F* auf der Platte befinden, befindet sich folglich die Schattenstrecke $\overline{T^*F^*}$ auch auf der Platte.

c) *Berechne die Koordinaten der beiden möglichen Kollisionspunkte.*

Die zur $x_1 - x_2$ -Ebene parallele Kreisbahn liegt in der Ebene H: $x_3 = 2$,
da die Lichtquelle L die x_3 -Koordinate 2 besitzt.

Die Kollisionspunkte liegen auf der Schnittgeraden k der Ebenen H und E:

$$\begin{array}{rcl} \text{Berechnung der Schnittgeraden k:} & x_2 + 2x_3 & = 6 \\ & x_3 & = 2 \end{array}$$

Lösung des Gleichungssystems: $x_3 = 2$, $x_2 = 2$, $x_1 = t$, $t \in \mathbb{R}$

$$\text{Gleichung der Schnittgeraden: } k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da die Kollisionspunkte auf der Gerade k liegen, haben diese die allgemeinen Koordinaten $P_t(t | 2 | 2)$.

$$\text{Der Radius der Kreisbahn beträgt } |\vec{LT}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9+16+0} = 5 \text{ Meter.}$$

Nun muss der Parameter t so gewählt werden, dass der Geradenpunkt P_t vom Mittelpunkt T der Kreisbahn den Abstand 5 besitzt: $|\vec{TP}_t| = 5$

$$|\vec{TP}_t| = \left| \begin{pmatrix} t-5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(t-5)^2 + 16}$$

$$\text{Bedingung: } \sqrt{(t-5)^2 + 16} = 5 \quad \Leftrightarrow (t-5)^2 + 16 = 25 \quad \Leftrightarrow t-5 = \pm 3$$

Daraus folgt $t = 8$ oder $t = 2$.

Die beiden Kollisionspunkte haben die Koordinaten $P_2(2 | 2 | 2)$ und $P_8(8 | 2 | 2)$

- a) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, welche die Lage der Markise beschreibt.

Parametergleichung der Ebene durch A, B, C: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3,9 \\ -1,3 \end{pmatrix}$

Normalenvektor von E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 3,9 \\ -1,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6,5 \\ 19,5 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{n}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ansatz für die Koordinatengleichung von E: $x_2 + 3x_3 = d$

Einsetzen von A(0|0|4) ergibt sich $d = 12$.

Koordinatengleichung von E: $x_2 + 3x_3 = 12$

Berechne den Winkel zwischen Markise und Hauswand.

Die $x_1 - x_3$ -Ebene besitzt den Normalenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\cos \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \alpha \approx 71,6^\circ$$

- b) Kann der Regenschutz dabei die Stehlampe berühren?

Der Regenschutz hat eine Länge von 2,7 Meter (x_3 -Koordinate von C).

Die Lampe endet im Punkt L(5|2|0,3).

Der Abstand von L zu C beträgt $|\overrightarrow{LC}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1,9 \\ 2,4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1,9^2 + 2,4^2} \approx 3,06 \text{ m} > 2,7 \text{ m}.$

Der Regenschutz kann die Stablampe nicht berühren.

Welchen Abstand von der Hauswand darf die Stehlampe auf der Terrasse höchstens haben, damit dies nicht passiert?

Der gesuchte Abstand der Lampe von der Hauswand sei a .

Der Endpunkt der Lampe sei $L^*(5|a|0,3)$ mit $0 < a < 4$ (aufgrund der Terrassenfläche)

Bedingung, damit der Regenschutz die Lampe nicht berührt: $\overline{L^*C} > 2,7$

$$\overline{L^*C} = |\overline{L^*C}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3,9 - a \\ 2,4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(3,9 - a)^2 + 2,4^2} > 2,7$$

Zunächst wird der Wert von a berechnet, für den der Abstand 2,7m beträgt.

$$\begin{aligned} \sqrt{(3,9 - a)^2 + 2,4^2} &= 2,7 \\ \Rightarrow (3,9 - a)^2 + 2,4^2 &= 2,7^2 \\ \Leftrightarrow (3,9 - a)^2 &= 1,53 \\ \Rightarrow 3,9 - a &= \pm\sqrt{1,53} \quad \Rightarrow a = 2,66 \quad \text{oder} \quad a = 5,13 \end{aligned}$$

Es kommt nur $a = 2,66$ in Betracht, da der Punkt L links von R sein muss.

Die Lampe darf höchstens 2,66m von der Hauswand entfernt stehen.

c) Begründe ohne Rechnung, dass die Terrasse nicht vollständig beschattet wird.

Die x_2 -Koordinate des Vektors $\vec{v}$ ist negativ.

Da die x_2 -Koordinaten der Markisenpunkte C und D kleiner sind als die der Terrassenpunkte R und S reicht der Schatten, den die Markise wirft, nicht bis zur äußeren Terrassenkante RS .

Bestimme die neuen Koordinaten der äußeren Eckpunkte der Markise.

Der Schatten soll bis zum Mittelpunkt der Strecke $\overline{QR}$ reichen, also bis zum Punkt $M(5|2|0)$.

Nun wird eine Hilfsgerade g aufgestellt, die M enthält und den Richtungsvektor $\vec{v}$

besitzt. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Einen Punkt des Markisenrands in der neuen Position erhält man durch den Schnitt von g mit der Ebene E , in der die Markise liegt:

$$2 - t + 3 \cdot (-3t) = 12 \Rightarrow -10t = 10 \Rightarrow t = -1$$

Der Schnittpunkt von g mit E lautet $S(4|3|3)$.

Da der gesuchte Eckpunkt C^* auf der Kante BC liegt, muss er die x_1 -Koordinate 5 besitzen. Daher ist $C^*(5|3|3)$.

Da der gesuchte Eckpunkt D^* auf der Kante AD liegt, muss er die x_1 -Koordinate 0 besitzen. Daher ist $D^*(0|3|3)$.

Aufgabe 24: (abgewandelte Abituraufgabe 2015)

a) Bestimme den Schnittpunkt der Geraden g_4 mit der Ebene E .

$$\text{Gleichung der Geraden } g_4 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt der Gerade mit der Ebene:

$$3 \cdot (5 + 4t) + 6 \cdot (1 + t) + 4 \cdot (1) = 16$$

$$\Leftrightarrow 15 + 12t + 6 + 6t + 4 = 16 \Leftrightarrow 18t = -9 \Leftrightarrow t = -0,5$$

Einsetzen von $t = -0,5$ in Geradengleichung: Schnittpunkt $S(3|0,5|1)$.

Welche Gerade der Schar ist orthogonal zu g_4 ?

$$\text{Die Geraden sind orthogonal, wenn gilt: } \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4a + 1 = 0 \Rightarrow a = -0,25.$$

Die Gerade $g_{-0,25}$ ist orthogonal zur Gerade g_4 .

Berechne den Schnittwinkel von g_4 und E .

$$\sin \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{16+1} \cdot \sqrt{9+36+16}} = \frac{18}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{61}} ; \text{ daraus folgt } \alpha \approx 34^\circ$$

b) Begründe, dass alle Geraden g_a in der Ebene $F: x_3 = 1$ liegen.

Ein allgemeiner Punkt auf der Schargeraden lautet $P_a(5 + t \cdot a | 1 + t | 1)$.

Da jeder Punkt die x_3 -Koordinate 1 besitzt, liegen alle Schargeraden in der Ebene F .

Bestimme eine Gleichung der Geraden h.

Alle Geraden, die in der Ebene F liegen und durch $P(5|1|1)$ gehen, haben die

$$\text{Bauart } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Gerade h gehört nicht zur Schar, wenn der Richtungsvektor von h kein

Vielfaches von $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist. Dies ist der Fall für $v_2 = 0$.

$$\text{Eine mögliche Geradengleichung lautet } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 25: (abgewandelte Abituraufgabe 2016)

a) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Nutzfläche liegt.

Parametergleichung der Ebene durch die Punkte A, B, C:

$$N: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenvektor von N: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -15 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{n}^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ansatz für die Koordinatengleichung von N: $2x_1 + 5x_3 = d$

Einsetzen von A(15|0|0) ergibt sich $d = 30$.

Koordinatengleichung von N: $2x_1 + 5x_3 = 30$

Berechne den Neigungswinkel der Nutzfläche gegen den Erdboden.

Die $x_1 - x_2$ -Ebene besitzt den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\cos \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{2^2 + 5^2} \cdot \sqrt{1^2}} = \frac{5}{\sqrt{29}} \Rightarrow \alpha \approx 21,8^\circ$$

Ermittle den Inhalt der Nutzfläche.

Da es sich laut Aufgabenstellung um ein Rechteck handelt, gilt

$$A_{\text{Nutzfläche}} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 20 \cdot \left| \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = 20 \cdot \sqrt{225 + 36} = 20 \cdot \sqrt{261} \approx 323,1 \text{ m}^2$$

b) *Überprüfe, ob diese Bedingung erfüllt ist.*

Die Dachflächenebene E ist parallel zur x_2 -Achse (da in der Koordinatengleichung die Variable x_2 fehlt) und sie schneidet die x_3 -Achse im Punkt D(0|0|9).

Die Dachflächenkante verläuft daher genau 9 m oberhalb der x_2 -Achse.

Da der Punkt C der Nutzfläche die x_3 -Koordinate 6 besitzt und auch die Nutzfläche parallel zur x_2 -Achse liegt, verläuft die Nutzfläche daher genau 6 m oberhalb der x_2 -Achse.

Die Höhe der Rückwand beträgt daher $9 \text{ m} - 6 \text{ m} = 3 \text{ m}$ und die Sicherheitsbedingung ist erfüllt.

Berechne die Koordinaten des Punktes auf der Kante BC, in dem das untere Ende der Stütze fixiert wird.

Um den gesuchten Punkt P zu berechnen, wird eine zur Ebene E parallele Ebene F aufgestellt werden, wobei F gegenüber E 5,2 m **senkrecht zum Erdboden** nach unten verschoben ist.

Ansatz für die Koordinatengleichung von F: $x_1 - 3x_3 = d$

Nun benötigt man noch einen Punkt von F.

Diesen erhält man, wenn man den rechten hinteren Eckpunkt D(0|20|9) der Dachfläche um 5,2 m nach unten verschiebt. Man erhält den Punkt P(0|20|3,8).

Einsetzen von P in die Koordinatengleichung: $0 - 3 \cdot 3,8 = d \Rightarrow d = -11,4$

Koordinatengleichung von F: $x_1 - 3x_3 = -11,4$

Gleichung der Gerade durch die Punkte B und C: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt von F mit g: $15 - 15t - 3 \cdot (6t) = -11,4 \Rightarrow -33t = -26,4 \Rightarrow t = 0,8$

Einsetzen von $t = 0,8$ in g ergibt den Schnittpunkt Q(3 | 20 | 4,8).

In diesem Punkt wird das untere Ende der Stütze fixiert.

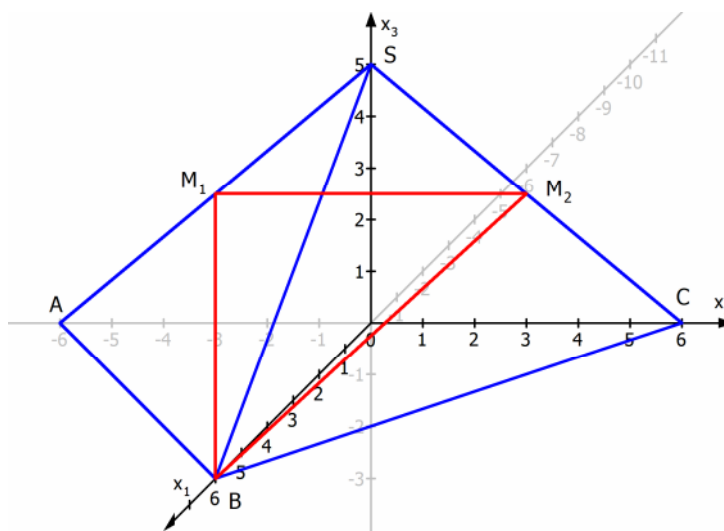
Aufgabe 26: (abgewandelte Abituraufgabe 2016)

a) Stelle die Pyramide und Schnittfläche in einem Koordinatensystem dar.

Berechnung der beiden Mittelpunkte:

$$M_1\left(\frac{0+0}{2} \mid \frac{-6+0}{2} \mid \frac{0+5}{2}\right) \Rightarrow M_1(0 \mid -3 \mid 2,5)$$

$$M_2\left(\frac{0+0}{2} \mid \frac{6+0}{2} \mid \frac{0+5}{2}\right) \Rightarrow M_2(0 \mid 3 \mid 2,5)$$



Berechne den Umfang der Schnittfläche.

$$U = \overline{M_1M_2} + \overline{BM_1} + \overline{BM_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 2,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2,5 \end{pmatrix} = 6 + \sqrt{36 + 9 + 6,25} + \sqrt{36 + 9 + 6,25}$$

$$U = 6 + 2 \cdot \sqrt{51,25} \approx 20,32 \text{ LE}$$

Bestimme eine Koordinatengleichung von E.

Parametergleichung der Ebene durch die Punkte M_1 , M_2 und B:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 2,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor von N: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 2,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ -36 \end{pmatrix}$

Vereinfachung des Normalenvektors zu $\vec{n}^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$

Ansatz für die Koordinatengleichung von E: $5x_1 + 12x_3 = d$

Einsetzen von B(6/0/0) ergibt sich $d = 30$.

Koordinatengleichung von E: $5x_1 + 12x_3 = 30$

b) *Bestimme die Koordinaten des Punktes Q.*

Gleichung der Gerade durch B und S: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Der gesuchte Punkt Q, der auf g liegt, besitzt die allgemeinen Koordinaten $Q(6 - 6t | 0 | 5t)$.

Man kann rein anschaulich erkennen, dass bei einem rechtwinkligen Dreieck der rechte Winkel nur im Punkt Q liegen kann.

Daher muss gelten: $\overrightarrow{M_1Q} \cdot \overrightarrow{M_2Q} = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 6 - 6t \\ 3 \\ 5t - 2,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 - 6t \\ -3 \\ 5t - 2,5 \end{pmatrix} = (6 - 6t)^2 - 9 + (5t - 2,5)^2 = 0$$

$$36 - 72t + 36t^2 - 9 + 25t^2 - 25t + 6,25 = 0$$

$$\Leftrightarrow 61t^2 - 97t + 33,25 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{97 \pm \sqrt{9409 - 8113}}{122} = \frac{97 \pm 36}{122} \quad t_1 = \frac{133}{122} \quad t_2 = 0,5$$

Für $t = 0,5$ ergibt sich der Punkt $Q(3|0|2,5)$.

Für $t = \frac{133}{122}$ liegt der Punkt Q nicht auf der Kante BS, da der x_1 -Wert negativ ist.

Daher ist der gesuchte Punkt $Q(3|0|2,5)$.

c) *Bestimme die Koordinaten von Z.*

Der Punkt Z liegt in der $x_1 - x_3$ -Ebene, also ist die x_2 -Koordinate 0.

Da er von der Grundfläche ABC und der Seitenfläche ACS den gleichen Abstand besitzt muss seine x_1 - und x_3 -Koordinate gleich groß sein

Allgemeine Koordinaten von Z: $Z(a|0|a)$

Abstand des Punktes Z von der Seitenfläche und der Grundfläche ist a.

Daher muss der Abstand von Z zur Ebene E ebenfalls gleich a sein.

$$\text{HNF von E: } \frac{5x_1 + 12x_3 - 30}{\sqrt{25 + 144}} = 0$$

Bedingung: $d(Z, E) = a$

$$\left| \frac{5a + 12a - 30}{13} \right| = a \Leftrightarrow \left| \frac{17a - 30}{13} \right| = a$$

$$\text{1. Fall: } \frac{17a - 30}{13} = a \Rightarrow 17a - 30 = 13a \Rightarrow a = 7,5$$

$$\text{2. Fall: } \frac{17a - 30}{13} = -a \Rightarrow 17a - 30 = -13a \Rightarrow a = 1$$

Für $a = 7,5$ ergibt sich der Punkt $Z(7,5|0|7,5)$.

Für $a = 1$ ergibt sich der Punkt $Z(1|0|1)$.

Da der Punkt $Z(7,5|0|7,5)$ außerhalb der Pyramide ABCS liegt, lautet der gesuchte Punkt $Z(1|0|1)$.

Aufgabe 27: (abgewandelte Abituraufgabe 2017)

a) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E.

Parametergleichung der Ebene E durch die Punkte R, S und T:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenvektor von E: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+1 \\ 2-0 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ansatz für die Koordinatengleichung von E: $-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = d$

Einsetzen von R(2|9|3) ergibt sich $d = 22$.

Koordinatengleichung von E: $-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 22$

Begründe, dass es sich bei dem Viereck QRST um ein Trapez handelt.

$$\text{Es gilt } \overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{QT} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Da die beiden Vektoren Vielfache zueinander sind, sind die Vektoren parallel. Somit ist das Viereck QRST ein Trapez.

Berechne den Flächeninhalt des Trapezes QRST.

$$\text{Berechnung der Trapezfläche: } A_{\text{Trapez}} = \frac{|\overrightarrow{QT}| + |\overrightarrow{RS}|}{2} \cdot h_{\text{Trapez}}$$

$$\text{Es gilt } |\overrightarrow{QT}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0+4+4} = \sqrt{8} \quad \text{und} \quad |\overrightarrow{RS}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$$

Die Höhe des Trapezes entspricht dem Abstand der beiden parallelen Geraden QT und RS.

Dies entspricht dem Abstand des Punktes R zur Geraden durch Q und T.

Gleichung der Geraden durch Q und T: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Allgemeiner Punkt auf h: $L(0 | 8 + 2r | 3 - 2r)$

Bedingung: $\overline{RL} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -1 + 2r \\ -2r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

$$-2 + 4r + 4r = 0 \Leftrightarrow r = 0,25$$

Daraus folgt $L(0 | 8,5 | 2,5)$.

Abstand von R zur Geraden h: $|\overline{LR}| = \begin{vmatrix} 2 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{vmatrix} = \sqrt{4 + 0,25 + 0,25} = \sqrt{4,5}$

$$\Rightarrow h_{\text{Trapez}} = \sqrt{4,5} \text{ m}$$

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{4,5} = 4,5 \text{ m}^2$$

b) *Bestimme die Höhe des zusammengesetzten Körpers.*

Der Abstand des Punktes C von der Trapezfläche QRST ist die Höhe des aufgestellten kleinen Teilkörpers.

Dies entspricht dem Abstand des Punktes C von der Ebene E.

HNF von E: $\frac{-x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 22}{\sqrt{1+4+4}} = 0 \Rightarrow \frac{-x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 22}{3} = 0$

Abstand von $C(0|10|3)$ von E: $d(C,E) = \left| \frac{-0 + 20 + 6 - 22}{3} \right| = \frac{4}{3}$

Der große Teilkörper hat eine Höhe von 3m.

Somit beträgt die Höhe des zusammengesetzten Körpers $\frac{13}{3}$ m

c) Bestimme den Wert für a , für den der Öffnungswinkel der Tür 30° beträgt.

Der Winkel von 30° entspricht dem Winkel zwischen der Ebene T_a und der $x_1 - x_3$ -Ebene.

$$\text{Bedingung: } \cos 30^\circ = \frac{\begin{vmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1} \cdot \sqrt{1}} \quad \Rightarrow 0,5 \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\sqrt{a^2+1} = \frac{1}{0,5 \cdot \sqrt{3}} \quad \Rightarrow a^2+1 = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow a = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Für $a = \sqrt{\frac{1}{3}}$ beträgt der Öffnungswinkel 30° .

Aufgabe 28: (abgewandelte Abituraufgabe 2017)

a) Berechne die Geschwindigkeit von F_1 in km/min.

$$v = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0,3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-4)^2 + 12^2 + 0,3^2} = \sqrt{160,09} \approx 12,65 \text{ km/min}$$

Bestimme den Zeitpunkt, zu dem F_1 eine Höhe von 4,9 km erreicht.

Das Flugzeug erreicht eine Höhe von 4,9 km, wenn gilt:

$$x_3 = 3,4 + 0,3t = 4,9 \Rightarrow t = 5$$

Um 14.05 Uhr erreicht das Flugzeug eine Höhe von 4,9 km.

Berechne die Weite des Winkels, mit dem das Flugzeug F_2 steigt.

Gleichung der Flugzeuggerade für F_2 :

$$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -17 \\ 54 \\ 3,2 \end{pmatrix} + s \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -18 \\ 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 54 \\ 3,2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

Der gesuchte Winkel entspricht dem Schnittwinkel zwischen der Gerade g_2 und der Bodenebene ($x_1 - x_2$ -Ebene: $x_3 = 0$)

$$\sin \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{6^2 + (-6)^2 + 0,2^2} \cdot \sqrt{1^2}} = \frac{0,2}{\sqrt{72,04}} \Rightarrow \alpha \approx 1,4^\circ$$

b) Prüfe, ob diese Bedingung erfüllt ist.

Berechnung des Schnittpunkts der Flugbahnen:

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 3,4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 54 \\ 3,2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} & -4t & -6s & = & -32 \\ \text{Zu lösen ist folgendes Gleichungssystem:} & 12t & +6s & = & 48 \\ & 0,3t & -0,2s & = & -0,2 \end{array}$$

Lösung des Gleichungssystems: $t = 2$ und $s = 4$.

Einsetzen von $t = 2$ in g_1 liefert den Schnittpunkt $S(7|30|4)$

Der Schnittpunkt S wird von F_1 nach $t = 2$ Minuten erreicht und von F_2 nach $s = 4$ Minuten erreicht.

Die Sicherheitsbedingung ist also erfüllt.

- c) *Beschreibe ein Verfahren, mit dem man den Zeitpunkt t_0 berechnen kann, zu dem beide Flugzeuge denselben Abstand vom Ballon haben.*

Punkt, zu dem sich F_1 zum Zeitpunkt t (in Minuten) befindet:

$$A(15 - 4t \mid 6 + 12t \mid 3,4 + 0,3t)$$

Punkt, zu dem sich F_2 zum Zeitpunkt t (in Minuten) befindet:

$$C(-17 + 6t \mid 54 - 6t \mid 3,2 + 0,2t)$$

Abstand des Ballons zum Flugzeug F_1 :

$$|\overline{BA}| = \sqrt{(15 - 4t - 6)^2 + (6 + 12t - 43)^2 + (3,4 + 0,3t - 4,3)^2}$$

Abstand des Ballons zum Flugzeug F_2 :

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-17 + 6t - 6)^2 + (54 - 6t - 43)^2 + (3,2 + 0,2t - 4,3)^2}$$

Nun muss die Gleichung $|\overline{BA}| = |\overline{BC}|$ gelöst werden.

Beschreibe ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung dieser Geraden bestimmen kann.

Zunächst werden die Punkte P und Q bestimmt, in denen sich die Flugzeuge zum Zeitpunkt t_0 befinden.

Als nächstes wird eine Hilfsebene E aufgestellt, die durch den Punkt B verläuft und deren Normalenvektor $\overline{PQ}$ beträgt: $[\vec{x} - \overline{OB}] \cdot \overline{PQ} = 0$

Diese Hilfsebene enthält sämtliche Punkte, die zum Zeitpunkt t_0 von beiden Flugzeugen gleich weit entfernt sind.

Zum Schluss berechnet man die Gleichung der Schnittgeraden von der Ebene E und der $x_1 - x_2$ -Ebene.

Aufgabe 29: (abgewandelte Abituraufgabe 2018)

a) *Weise nach, dass die Bodenfläche der oberen Etage nicht rechtwinklig ist.*

Nachweis, dass das Dreieck DEF nicht rechtwinklig ist:

$$\text{Es gilt: } \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} -25 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -25 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kontrolle, ob zwei der Vektoren zueinander orthogonal sind:

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = 150 \neq 0$$

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{EF} = -750 \neq 0$$

$$\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{EF} = 500 \neq 0$$

Da alle drei Skalarproduktergebnisse nicht 0 ergeben, liegt keine Orthogonalität vor.

Erläutere die Schritte des dargestellten Vorgehens.

Linke Seite der Gleichung: Parameterform der Gerade durch A und D.

Rechte Seite der Gleichung: Parameterform der Gerade durch E und B.

Die Lösung des Gleichungssystems wird ermittelt.

Danach wird der Wert von r in die Gerade durch A und D eingesetzt.

Damit erhält man die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Geraden.

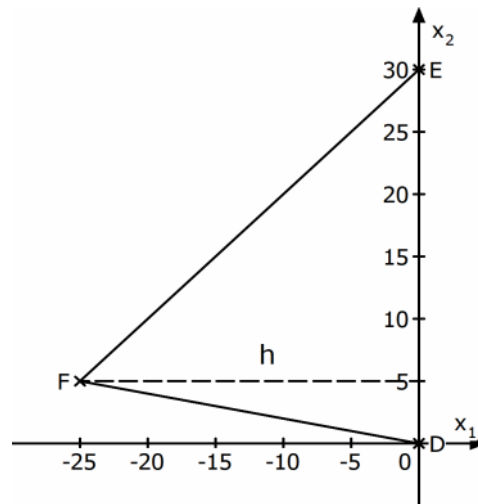
b) *Berechne den Inhalt der Bodenfläche der oberen Etage.*

Das Dreieck DEF ist weder rechtwinklig und auch nicht gleichschenkelig.

Es gibt zwei Möglichkeiten den Flächeninhalt des Dreiecks zu bestimmen.

1. Möglichkeit: Grafische Lösung

Da sich das Dreieck DEF auf der Höhe $x_3 = 15$ befindet, genügt es die ersten beiden Koordinaten der Punkte DEF zu betrachten und diese in ein ebenes Koordinatensystem einzuzeichnen.



Aus der Zeichnung folgt: $A_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DE} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 25 = 375 \text{ m}^2$

2.Möglichkeit: Rechnerische Lösung

Die Fläche eines beliebigen Dreiecks DEF kann mit dem Vektorprodukt ermittelt werden:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\overline{DE} \times \overline{DF}|$$

$$\overline{DE} \times \overline{DF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -25 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 + 30 \cdot 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 750 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 750 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 750 = 375 \text{ m}^2$$

Weise nach, dass zur Entfeuchtung der Luft eine Leistung von 25 Kilowatt ausreichend ist.

Gesucht ist nun der Rauminhalt (Volumen) der Pyramide DEFG.

Die Pyramidenhöhe entspricht dem Abstand des Punktes G von der Grundfläche DEF.

Da die Grundfläche horizontal auf der Höhe $x_3 = 15$ verläuft und der x_3 -Wert von G 35 ist, ergibt sich also Höhe $35 - 15 = 20$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot 375 \cdot 20 = 2500 \text{ m}^3$$

Die benötigte elektrische Leistung beträgt $(2500 : 100) \cdot 0,8 = 20 < 25$ Kilowatt.

Damit ist gezeigt, dass die Leistung ausreichend ist.

- c) *Berechne die Koordinaten des Punktes, der die Position des Scheinwerfers im Modell beschreibt.*

Zunächst wird die Koordinatengleichung der Ebene K benötigt, in der die Punkte EFG liegen.

$$\text{Parameterform für K: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -25 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenvektor von K: } \vec{n} = \begin{pmatrix} -25 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -500 \\ 500 \\ 250 \end{pmatrix} \quad \text{bzw. } \vec{n}^* = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ansatz für die Koordinatengleichung: K: $-2x_1 + 2x_2 + x_3 = d$

Einsetzen des Punktes E(0|30|15): $60 + 15 = 75 = d$

Koordinatengleichung K: $-2x_1 + 2x_2 + x_3 = 75$

Die Metallstange liegt auf der Geraden g durch G(-10|10|35) und R(-5|5|15):

$$\text{Gleichung der Geraden g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 35 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist ein Punkt auf der Geraden g, der von der Ebene K den Abstand 8 besitzt.

$$\text{HNF von K: } \frac{-2x_1 + 2x_2 + x_3 - 75}{3} = 0$$

Allgemeiner Punkt auf der Geraden: P(-10 + 5t | 10 - 5t | 35 - 20t)

Es soll gelten: $d(P, K) = 8$

$$\left| \frac{-2(-10 + 5t) + 2(10 - 5t) + 35 - 20t - 75}{3} \right| = 8 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{-40t}{3} \right| = 8$$

$$\text{1. Fall: } \frac{-40t}{3} = 8 \Rightarrow t = -0,6$$

$$\text{2. Fall: } \frac{-40t}{3} = -8 \Rightarrow t = 0,6$$

Für $t = -0,6$ ergibt sich P(-13 | 13 | 47)

Dieser Punkt liegt nicht zwischen den Punkten G und R und kommt daher nicht in Frage.

Für $t = 0,6$ ergibt sich $P(-7 \mid 7 \mid 23)$.

Dieser Punkt liegt zwischen G und R und ist daher die gesuchte Position des Scheinwerfers.

Aufgabe 30: (abgewandelte Abituraufgabe 2018)

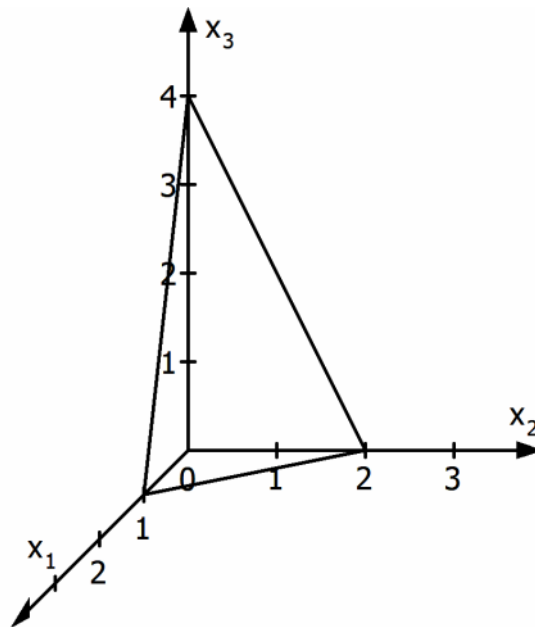
a) Stelle die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.

Für die Veranschaulichung von E benötigt man die Spurpunkte:

Schnittpunkt mit der x_1 -Achse: $S_1(x_1 | 0 | 0) \Rightarrow S_1(1 | 0 | 0)$

Schnittpunkt mit der x_2 -Achse: $S_2(0 | x_2 | 0) \Rightarrow S_2(0 | 2 | 0)$

Schnittpunkt mit der x_3 -Achse: $S_3(0 | 0 | x_3) \Rightarrow S_3(0 | 0 | 4)$



Zeige, dass E nicht orthogonal zu F ist.

E ist orthogonal zu F , wenn die Normalenvektoren der Ebenen zueinander orthogonal sind.

$$\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 8 + 1 = 9 \neq 0, \text{ also ist } E \text{ nicht orthogonal zu } F.$$

Bestimme eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und F .

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & & & & + & x_3 & = & 4 \end{array}$$

Setze $x_1 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$

Aus der 2. Zeile folgt: $2t + x_3 = 4 \Rightarrow x_3 = 4 - 2t$

Aus der 1. Zeile folgt: $4t + 2x_2 + 4 - 2t = 4 \Rightarrow x_2 = -t$

$$\text{Schnittgerade s: } \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 4-2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

c) Gib an, für welche Werte von a die zugehörige Ebene E_a alle drei Koordinatenachsen schneidet.

Die Ebene schneidet alle drei Koordinatenachsen, wenn die Ebene zu keiner Koordinatenachse parallel ist.

Eine Ebene ist parallel zu einer Koordinatenachse, wenn mindestens eine Koordinate des Normalenvektors 0 ergibt.

Für $a = 0$ ist die Ebene parallel zur x_1 -Achse.

Für $a = 2$ ist die Ebene parallel zur x_2 -Achse.

Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ schneidet die Ebene alle drei Koordinatenachsen.

Bestimme einen Wert für a so, dass das Pyramidenvolumen 6 VE beträgt.

Zur Berechnung des Pyramidenvolumens benötigt man die Spurpunkte von E_a :

$$\text{Schnittpunkt mit der } x_1\text{-Achse: } S_1(x_1 | 0 | 0) \Rightarrow S_1\left(\frac{4}{a} | 0 | 0\right)$$

$$\text{Schnittpunkt mit der } x_2\text{-Achse: } S_2(0 | x_2 | 0) \Rightarrow S_2\left(0 | \frac{4}{a-2} | 0\right)$$

$$\text{Schnittpunkt mit der } x_3\text{-Achse: } S_3(0 | 0 | x_3) \Rightarrow S_3(0 | 0 | 4)$$

$$\text{Formel für Pyramidenvolumen: } V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Als Grundfläche wählt man das rechtwinklige Dreieck OS_1S_2 :

$$G = \frac{1}{2} \cdot \overline{OS_1} \cdot \overline{OS_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{a} \cdot \frac{4}{a-2} = \frac{8}{a(a-2)}$$

$$\text{Die Höhe der Pyramide beträgt } \overline{OS_3} = 4$$

$$\text{Pyramidenvolumen: } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{a(a-2)} \cdot 4 = \frac{32}{3a(a-2)}$$

$$\text{Bedingung: } \frac{32}{3a(a-2)} = 6 \Leftrightarrow 32 = 18a^2 - 36a$$

$$\Leftrightarrow 18a^2 - 36a - 32 = 0 \quad a_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{1296 + 2304}}{36} = \frac{36 \pm 60}{36}$$

$$a_1 = \frac{8}{3} \text{ und } a_2 = -\frac{2}{3}$$

c) Bestimme den Wert für a so, dass der Abstand von $P(0|0|1)$ zu E_a maximal ist.

$$\text{HNF von } E_a: \frac{ax_1 + (a-2)x_2 + x_3 - 4}{\sqrt{a^2 + (a-2)^2 + 1}} = 0$$

$$\text{Abstand von P zu } E_a: d(P, E_a) = \left| \frac{-3}{\sqrt{a^2 + (a-2)^2 + 1}} \right| = \frac{3}{\sqrt{2a^2 - 4a + 5}} = f(a)$$

Die Funktion $f(a)$ wird maximal wenn der Term $g(a) = 2a^2 - 4a + 5$ minimal wird.

$$\text{Bedingung: } g'(a) = 0 \Rightarrow 4a - 4 = 0 \Rightarrow a = 1$$

Das Schaubild von g ist eine nach oben geöffnete Parabel, somit existiert bei $a = 1$ ein Minimum.

Der Abstand $f(a)$ wird maximal für $a = 1$.

Begründe, dass die Schar keine zueinander parallele Ebenen enthält.

Zwei beliebige Ebenen der Schar besitzen die Normalenvektoren

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ a-2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{n}^* = \begin{pmatrix} a^* \\ a^*-2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ wobei } a \neq a^* \text{ sein soll.}$$

Wenn die Ebenen parallel sind, müssen die Normalenvektoren Vielfache zueinander sein.

$$\text{Bedingung: } k \cdot \begin{pmatrix} a \\ a-2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* \\ a^*-2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus der 3. Zeile folgt $k = 1$

Aus der 1. Zeile folgt dann $a = a^*$, was aber gemäß Voraussetzung nicht erlaubt ist, da es sich ja um verschiedene Ebenen handeln soll.

Damit ist der Nachweis erbracht.