

Ausgewählte Abituraufgaben 2004 - 2018 von Baden-Württemberg

Analytische Geometrie - Wahlteil

allgemeinbildende Gymnasien – Leistungsfach

**Die Aufgaben wurden teilweise geändert, so dass diese mit
Hilfe eines WTR bearbeitet werden können.**

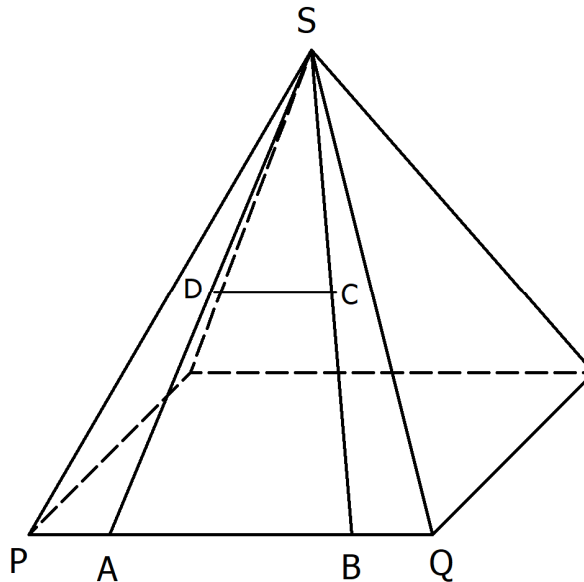
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

April 2021

Aufgabe 1: (abgewandelte Abituraufgabe 2004)

Ein Zelt hat die Form einer senkrechten quadratischen Pyramide.
Die Längen der Quadratseiten und die Pyramidenhöhe betragen jeweils 2,0 m.



- a) Benachbarte Seitenflächen bilden einen stumpfen Winkel. Wie groß ist dieser?
- b) In der Vorderfläche PQS befindet sich eine Einstiegsöffnung ABCD in der Form eines symmetrischen Trapezes.
C und D sind die Mitten der Strecke BS bzw. der Strecke AS.
Die Strecke AB hat die Länge 1,0 m.
Wie viel Prozent der Vorderfläche beansprucht die Einstiegsöffnung?
- c) Zur Beleuchtung wird im Zelt eine Lampe aufgehängt, die im Folgenden als punktförmige Lichtquelle betrachtet werden soll. Ihr Licht dringt durch die Einstiegsöffnung nach außen und erzeugt auf dem Boden vor dem Zelt das Bild ABC^*D^* der Einstiegsöffnung als „Lichtteppich“.
Berechne die Länge der Strecke C^*D^* , wenn sich die Lampe 25cm unter der Zeltspitze befindet.

Aufgabe 2: (abgewandelte Abituraufgabe 2004)

Gegeben sind die Punkte $A(10|0|0)$ und $B(0|10|0)$ sowie für jedes $a > 0$ eine Ebene $E_a : a \cdot x_1 - x_3 = 0$.

a) Beschreibe die Lage der Ebene E_3 .

Die zu E_a senkrechte Gerade durch A schneidet E_a im Punkt D_a .

Bestimme seine Koordinaten.

(Teilergebnis: $D_a \left(\frac{10}{1+a^2} \mid 0 \mid \frac{10a}{1+a^2} \right)$)

b) Zeige, dass das Dreieck ABD_a für jedes $a > 0$ rechtwinklig ist.

Aufgabe 3: (abgewandelte Abituraufgabe 2005)

Gegeben sind eine Pyramide ABCDS mit den Punkten $A(0|0|0)$, $B(8|0|0)$, $C(8|8|0)$, $D(0|8|0)$, $S(4|4|8)$ sowie für jedes $r \in \mathbb{R}$ eine Ebene $E_r : r \cdot x_1 + 3x_3 = 8 \cdot r$.

- a) Stelle die Pyramide in einem Koordinatensystem dar.
Die Ebene E_2 enthält die Pyramidenkante $[BC]$ und schneidet die Kante $[DS]$ in F und die Kante $[AS]$ in G . Gib die Koordinaten der Punkte F und G an.
Zeichne das Viereck $BCFG$ ein.
Zeige, dass das Viereck ein gleichschenkliges Trapez ist.
Wie groß sind die Innenwinkel dieses Trapezes?
- b) Bestimme r^* so, dass die Pyramidenspitze S von der Ebene E_{r^*} den Abstand 4 hat. Gib die Koordinaten desjenigen Punktes in dieser Ebene E_{r^*} an, der von S den Abstand 4 hat.
- c) Weise nach, dass die Gerade durch B und C in jeder Ebene E_r liegt.
Beim Schnitt der Ebene E_r mit der Pyramide entsteht eine Schnittfigur.
Welche Schnittfiguren sind möglich? Gib die jeweiligen Werte von r an.

Aufgabe 4: (abgewandelte Abituraufgabe 2005)

Gegeben sind die Punkte A (2 | 1 | 3) und B (2 | 5 | 3) sowie die

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } r \in \mathbb{R}$$

- a) Die Ebene E enthält die Punkte A und B und verläuft parallel zu g. Bestimme eine Gleichung von E. Beschreibe die Lage von E. Welchen Abstand hat g von E?
- b) Der Punkt T liegt auf der Geraden g und bildet zusammen mit den Punkten A und B ein bei T rechtwinkliges Dreieck. Bestimme die Koordinaten von T. Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck ABT? Bestimme einen Punkt, der von A, B und T den gleichen Abstand hat.
- c) Das Dreieck ABC mit C(2 | 3 | 5) rotiert um die Seite AB. Dabei entsteht ein Doppelkegel. Bestimme dessen Volumen.

Aufgabe 5: (abgewandelte Abituraufgabe 2006)

Die Punkte $A(3|5|-4)$, $B(4|1|4)$ und $D(-4|9|0)$ legen eine Ebene E fest.

- a) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E .
Zeige, dass das Dreieck ABD gleichschenkelig, aber nicht gleichseitig ist.
Bestimme die Koordinaten des Punktes C so, dass das Viereck $ABCD$ eine Raute ist.
Berechne die Koordinaten des Diagonalschnittpunktes M dieser Raute.
- b) Gegeben ist ein weiterer Punkt $S(8|15|6)$.
Die Raute $ABCD$ bildet zusammen mit dem Punkt S eine Pyramide.
Bestimme das Volumen dieser Pyramide.
Der Pyramide wird ein Kreiskegel mit Spitze S einbeschrieben, dessen Grundfläche in der Ebene E liegt.
Berechne das Volumen des Kreiskegels.

Aufgabe 6: (abgewandelte Abituraufgabe 2006)**Aufgabe 6-1:**

In einem Freizeitpark steht eine Kletteranlage in Form eines Pyramidenstumpfes mit vier unterschiedlichen Kletterwänden.

Der Pyramidenstumpf entsteht aus einer Pyramide, indem diese parallel zur Grundfläche durchgeschnitten und der obere Teil weggelassen wird.

Der Pyramidenstumpf hat als Grundfläche das Viereck ABCD mit

$A(0|0|0)$, $B(6|6|0)$, $C(0|18|0)$ und $D(-8|4|0)$

und als Deckfläche das Viereck $A^*B^*C^*D^*$ mit

$A^*(4|1|20)$, $B^*(7|4|20)$ und $C^*(4|10|20)$ (Koordinatenangaben in Meter)

a) Zeige, dass $S(8|2|40)$ die Spitze der ursprünglichen Pyramide ist.

Bestimme die Koordinaten des Punktes D^* .

Zeichne den Pyramidenstumpf in ein Koordinatensystem ein.

b) Berechne den Flächeninhalt der Wand ABB^*A^* .

Untersuche, ob die Wand ABB^*A^* nach außen überhängt.

Aufgabe 6-2:

Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \vec{v}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$

Gib zu jeder der folgenden Lagebeziehungen von g und h jeweils einen möglichen Vektor $\vec{v}$ an und begründe deine Antworten:

- (1) g und h schneiden sich im Punkt $S(-4|0|-1)$
- (2) g und h sind windschief
- (3) g und h schneiden sich orthogonal

Aufgabe 7: (abgewandelte Abituraufgabe 2007)**Aufgabe 7-1:**

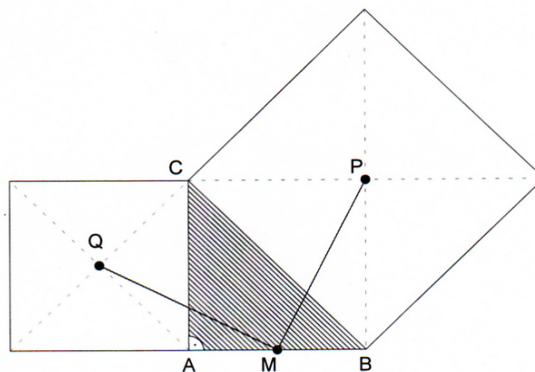
Die Ebene $E: x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$ stellt für $x_3 \geq 0$ einen Hang dar, der aus der $x_1 - x_2$ -Ebene aufsteigt.

Im Punkt $H(6|4|0)$ steht ein 80 m hoher Sendemast senkrecht zur $x_1 - x_2$ -Ebene. (1 LE entspricht 10m).

- Stelle den Hang und den Sendemast in einem Koordinatensystem dar.
Bestimme den Neigungswinkel des Hangs.
Der Sendemast wird auf halber Höhe mit einem möglichst kurzen Stahlseil am Hang verankert.
Berechne die Koordinaten des Verankerungspunktes am Hang.
Bestimme die Länge des Stahlseils.
- Der Sendemast wird von der Sonne beschienen und wirft einen Schatten auf die $x_1 - x_2$ -Ebene und den Hang. Der Schatten des Sendemastes endet in einem Punkt T des Hangs.
Beschreibe einen Weg, wie man die Gesamtlänge des Schattens bestimmen kann.
- Bei einem Sturm knickt der Sendemast im Punkt $K(6|4|k)$ um.
Die Spitze des Sendemastes trifft dabei den Hang im Punkt $R(4|0|2)$.
Bestimme die Höhe, in welcher der Sendemast abgknickt ist.

Aufgabe 7-2:

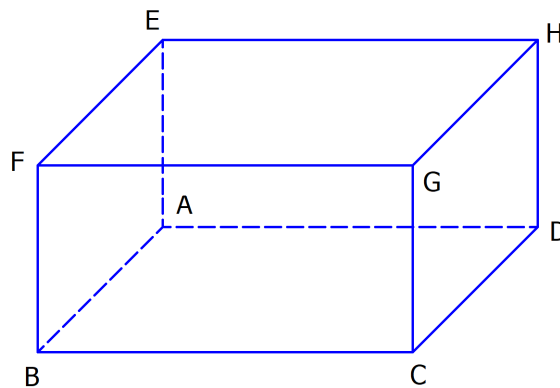
Das Dreieck ABC ist gleichschenkelig und rechtwinklig.
 P und Q sind die Schnittpunkte der Quadratdiagonalen, M ist die Mitte von AB .
Beweise, dass die Strecken $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$ orthogonal und gleich lang sind.



Aufgabe 8: (abgewandelte Abituraufgabe 2007)

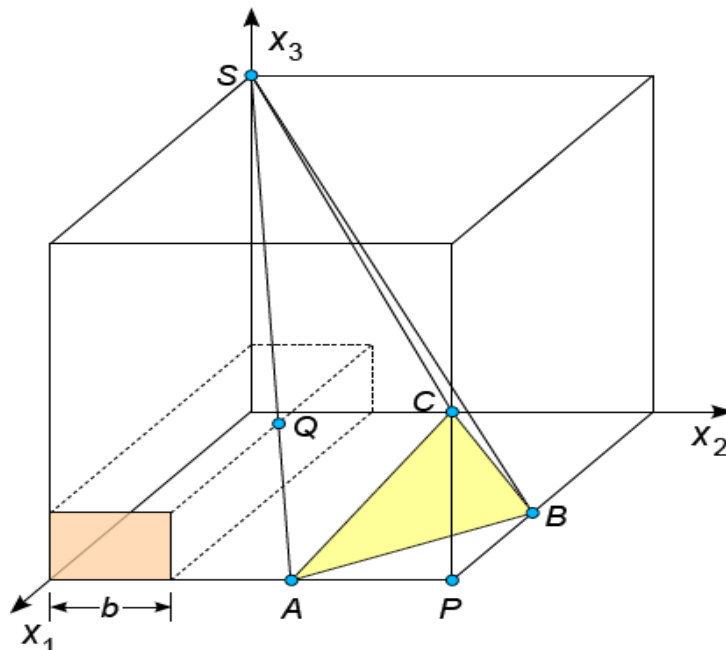
Eine quaderförmige Kiste ist in einem Koordinatensystem durch die Eckpunkte $A(0|0|0)$, $B(3|0|0)$, $D(0|5|0)$ und $F(3|0|4)$ festgelegt.

Die Fläche EFGH stellt den Deckel der geschlossenen Kiste dar. Dieser ist drehbar um die Kante EH.



Weiterhin ist für jedes $t \geq 0$ eine Ebene E_t gegeben durch: $E_t: t \cdot x_1 - x_3 = -4$

- Berechne den Abstand zwischen den Kanten AB und GH.
Zeige, dass die Gerade durch E und H in jeder Ebene E_t liegt.
In welcher Ebene E_t liegt der Deckel bei geschlossener Kiste?
Liegt der Deckel in einer Ebene E_{t^*} , wenn er um 90° geöffnet ist?
- Wenn der Deckel der geöffneten Kiste in E_2 liegt, wird er durch einen Stab orthogonal zum Deckel abgestützt. Dieser Stab ist in der Mitte der Kante EF befestigt und trifft im Punkt P auf den Deckel.
Berechne die Koordinaten von P.
- Wie groß ist der Öffnungswinkel, wenn der Deckel in E_2 liegt?
In welcher Ebene E_t liegt der Deckel, wenn der Öffnungswinkel 60° beträgt?
Bestimme den Parameter t in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel α für $\alpha < 90^\circ$.
- Eine punktförmige Lichtquelle in $L(0|2,5|20)$ beleuchtet die Kiste.
Wie weit kann man die Kiste höchstens öffnen, ohne dass Licht von L in die Kiste fällt?

Aufgabe 9: (abgewandelte Abituraufgabe 2008)

In einem Würfel mit den Eckpunkten $O(0|0|0)$, $P(10|10|0)$ und $S(0|0|10)$ befindet sich eine Pyramide mit einem Dreieck als Grundfläche und der Spitze S (vgl. Skizze). Die Eckpunkte der Pyramidengrundfläche sind $A(10|6|0)$, $B(6|10|0)$ und $C(10|10|5)$.

- a) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E , in der die Grundfläche der Pyramide liegt.
Welchen Winkel schließen die Grundflächen von Würfel und Pyramide ein?
Untersuche, ob die Höhe der Pyramide auf der Diagonalen PS des Würfels liegt.
(Teilergebnis: $E: 5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 80$)
- b) Wie viel Prozent des Würfelvolumens beträgt das Pyramidenvolumen?
- c) Zusätzlich zur Pyramide soll nun noch ein Quader der Breite b in den Würfel gelegt werden. Die Abmessungen des Quaders werden so gewählt, dass er die Pyramide nur in einem Punkt Q der Pyramidenkante AS berührt (vgl. Skizze).
Welches Volumen hat ein solcher Quader mit der Breite $b = 4$?
Welche Werte kann das Volumen eines solchen Quaders annehmen, wenn die Breite b variabel ist?

Aufgabe 10: (abgewandelte Abituraufgabe 2008)

Die Punkte $A(5|0|0)$, $B(5|3|0)$, $C(5|0|4)$, $F(0|0|0)$, $G(0|3|0)$ und $H(0|0|4)$ sind die Ecken eines dreiseitigen Prismas mit Grundfläche ABC .

- a) Stelle das Prisma in einem Koordinatensystem dar.
Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E , in der die Fläche $BGHC$ liegt.
Unter welchem Winkel schneidet E die $x_1 - x_2$ -Ebene?
Berechne den Abstand des Punktes A von der Geraden CG .

- b) Im Prisma liegt ein Zylinder mit Radius $0,5$ und Grundkreismittelpunkt $M(0|0,5|0,5)$, dessen Achse parallel zur x_1 -Achse verläuft.
Ermittle die Abstände des Punktes M von den drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas.
Berührt der Zylinder alle drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas?

Ein anderer Zylinder mit Radius r und Grundkreismittelpunkt $M^*(0|r|r)$, dessen Achse ebenfalls parallel zur x_1 -Achse ist, soll alle drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas von innen berühren.
Bestimme den Radius r dieses Zylinders.

Aufgabe 11: (abgewandelte Abituraufgabe 2009)

Die $x_1 - x_2$ -Ebene beschreibt eine flache Landschaft, in der ein Flugplatz liegt.

Eine Radarstation befindet sich im Punkt $R_1(6 | 3 | 0)$.

Das Radar erfasst einen Testflugzeug F_1 um 7.00 Uhr im Punkt $P(7|29|7)$ und ermittelt als Flugbahn des Flugzeugs

$$f_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ in Minuten nach 7.00 Uhr, Koordinatenangaben in km}).$$

- a) In welchem Punkt befindet sich das Flugzeug um 7.01 Uhr?
Woran erkennt man, dass sich das Flugzeug im Sinkflug befindet?
Bestimme die Geschwindigkeit des Flugzeugs in km/h.
Unter welchem Winkel fliegt das Flugzeug auf den Boden zu?
Zu welcher Uhrzeit und in welchem Punkt würde es bei Beibehaltung dieser Flugbahn auf dem Boden aufsetzen?
- b) Eine weitere Radarstation befindet sich im Punkt $R_2(17 | 9 | 0)$.
Der Anflug des Testflugzeugs F_1 auf den Flugplatz ist optimal, wenn die Flugbahn f_1 und die beiden Radarstationen in einer Ebene liegen.
Prüfe, ob das zutrifft.
Die Radarstation R_2 übernimmt die Flugüberwachung zu dem Zeitpunkt, ab dem sich das Flugzeug von R_1 entfernt.
Um wie viel Uhr ist dies der Fall?
- c) Die Flugbahn des zweiten Testflugzeugs F_2 wird beschrieben durch

$$f_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \text{ in Minuten nach 7.00 Uhr, Koordinatenangaben in km}).$$

Wie weit sind die Flugzeuge F_1 und F_2 um 7.04 Uhr voneinander entfernt?

Berechne, wie nahe sich die beiden Flugzeuge kommen.

Aufgabe 12: (abgewandelte Abituraufgabe 2009)**Aufgabe 12-1:**

Die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide hat die Eckpunkte $P(0|-6|0)$, $Q(12|0|0)$ und $R(0|6|0)$. Die Pyramide wird von einer Ebene geschnitten und der obere Teilkörper wird entfernt. Die Deckfläche des so entstandenen Pyramidenstumpfs hat die Eckpunkte $P^*(0|-2|2)$, $Q^*(2|0|2,5)$ und $R^*(0|1|2,5)$.

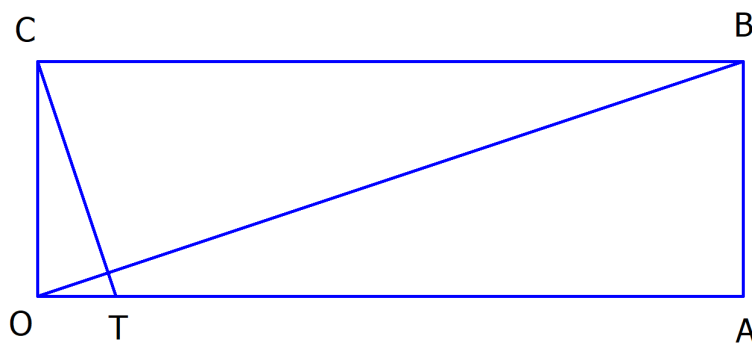
- a) Stelle den Pyramidenstumpf in einem Koordinatensystem dar.
 Begründe, dass die Deck- und die Grundfläche des Pyramidenstumpfs nicht parallel sind.
 Bestimme den Winkel, den die Kante QQ^* mit der x_1 -Achse bildet.
 Zeige, dass $S(0|0|3)$ die Spitze der ursprünglichen Pyramide ist.
- b) Bestimme den Abstand des Punktes Q^* von der Geraden durch Q und R .
 Zeige, dass die Seitenfläche QRR^*Q^* des Pyramidenstumpfs ein Trapez ist.
 Berechne den Flächeninhalt dieses Trapezes.

Aufgabe 12-2:

Das Rechteck $OABC$ ist dreimal so lang wie breit.

Für den Punkt T gilt $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{9}\overrightarrow{OA}$.

Zeige, dass die Strecken OB und TC orthogonal sind.



Aufgabe 13: (abgewandelte Abituraufgabe 2010)

Gegeben sind die Punkte $A(0|4|0)$, $B(0|0|2)$ und $C(4|0|0)$.

- a) Zeige, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig ist.
Ergänze das Dreieck ABC durch einen Punkt D zu einer Raute.
Berechne die Innenwinkel der Raute.
Zeige, dass die Raute in der Ebene $E: x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ liegt.

Gegeben ist für jedes $t \neq 0$ der Punkt $S_t(-3 + 3t \mid -3 + 3t \mid 5 + t)$.

Die Pyramide P_t hat die Grundfläche ABCD und die Spitze S_t .

- b) Zeichne die Pyramide P_3 in ein Koordinatensystem.
Die Punkte B, D und S_3 legen eine Ebene F fest.
Bestimme eine Koordinatengleichung von F.
Zeige, dass die Ebene F Symmetrieebene der Pyramide P_3 ist.
- c) Für welchen Wert von t geht die Höhe der Pyramide P_t durch den Mittelpunkt der Grundfläche?
Das gleichschenkelige Dreieck ACS_3 wird um die Achse AC gedreht.
In welchen Punkten durchstößt dabei seine Spitze die $x_1 - x_2$ -Ebene?

Aufgabe 14: (abgewandelte Abituraufgabe 2010)

Gegeben sind der Punkt $A(4,5|6|3,5)$ sowie die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- a) Bestimme den Schnittpunkt der Geraden g mit der $x_1 - x_2 -$ Ebene.

Zeichne die Gerade g in ein Koordinatensystem.

Unter welchem Winkel schneidet g die $x_1 - x_2 -$ Ebene?

Welcher Punkt F auf der Geraden g hat vom Punkt A den kleinsten Abstand?

Die Gerade h entsteht durch Spiegelung von g an A .

Bestimme eine Gleichung von h .

- b) Begründe, dass bei Rotation der Geraden g um die Gerade durch A und F eine Ebene entsteht.

Zeige, dass $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$ eine Gleichung dieser Ebene ist.

Untersuche, ob die Punkte $P(18|-9|1)$ und $Q(-2|1|-9)$ auf verschiedenen Seiten dieser Ebene liegen.

Aufgabe 15: (abgewandelte Abituraufgabe 2011)

Eine prismenförmige Truhe ist durch ihre Eckpunkte $A(6|4|0)$, $B(6|8|0)$, $C(-4|8|0)$, $D(-4|4|0)$, $P(6|4|4)$, $Q(6|8|6)$, $R(-4|8|6)$ und $S(-4|4|6)$ gegeben. Das Viereck PQRS beschreibt den Deckel der Truhe.

- a) Stelle die Truhe in einem Koordinatensystem dar.
Berechne das Volumen der Truhe.
Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, in welcher der Deckel der Truhe liegt.

Gegeben ist eine Ebenenschar durch $E_a : x_2 - ax_3 = 8 - 6a$; $a \in \mathbb{R}$

- b) Zeige, dass die Ebene, in der der Deckel liegt, und die Ebene, in der die Rückwand BCRQ liegt, zur Ebenenschar gehören.
Zeige, dass es eine Gerade gibt, die in allen Ebenen E_a der Schar liegt.
Berechne den Schnittwinkel φ von E_0 und E_2 .
Welche andere Ebene E_a schließt mit der Ebene E_2 ebenfalls den Winkel φ ein?
- c) Der Deckel der Truhe ist um die Kante QR drehbar.
Durch Drehung des Deckels um 90° wird die Truhe geöffnet.
In welcher Ebene E_a liegt der Deckel dann?
Der Punkt P geht bei dieser Drehung in den Punkt P^* über.
Bestimme die Koordinaten von P^* .

Aufgabe 16: (abgewandelte Abituraufgabe 2011)

Ein Gebäude hat als Grundfläche das Rechteck ABCD mit $A(4|0|0)$, $B(4|6|0)$, $C(0|6|0)$ und $D(0|0|0)$ und als Dachfläche das Viereck EFGH mit $E(4|0|4)$, $F(4|6|1)$, $G(0|6|5)$ und $H(0|0|8)$ (Koordinatenangaben in Meter).

- a) Stelle das Gebäude in einem Koordinatensystem dar.
Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Dachfläche EFGH liegt.
Welchen Neigungswinkel besitzt die Dachfläche?
Zeige, dass die Dachfläche ein Parallelogramm ist.
Berechne den Inhalt der Dachfläche.
- b) Im Innern des Gebäudes soll eine Lampe im Punkt $L(d|d|d)$ angebracht werden.
Die Lampe soll von der Bodenfläche und der Dachfläche des Gebäudes den gleichen Abstand haben. Bestimme d .
- c) Eine Person mit 1,7 m Augenhöhe bewegt sich vom Punkt $P(5|1|0)$ aus in positiver x_2 - Richtung.
Wie weit muss sie mindestens gehen, damit sie die Ecke H sehen kann?

Aufgabe 17: (abgewandelte Abituraufgabe 2012)

Die Ebene E enthält die Punkte $A(6|1|0)$, $B(2|3|0)$ und $P(3|0|2,5)$.

- a) Bestimme eine Koordinatengleichung von E.
Stelle die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.
Unter welchem Winkel schneidet E die x_1 -Achse?
- b) Zeige, dass das Dreieck ABP gleichschenkelig ist.
Das Viereck ABCD ist ein Rechteck mit Diagonalschnittpunkt P.
Bestimme die Koordinaten der Punkte C und D.
Es gibt senkrechte Pyramiden mit Grundfläche ABCD und Höhe 12.
Berechne die Koordinaten der Spitzen dieser Pyramiden.
- c) Welche Punkte der x_1 -Achse bilden jeweils mit A und B ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse AB?
- d) Gegeben ist ein senkrechter Kegel mit Grundkreismittelpunkt $M(0|0|0)$, Grundkreisradius 4 und Spitze $S(0|0|12)$.
Untersuche, ob der Punkt $R(2|2|3)$ innerhalb des Kegels liegt.

Aufgabe 18: (abgewandelte Abituraufgabe 2012)

In einem Koordinatensystem beschreibt die $x_1 - x_2$ -Ebene die Meeresoberfläche (1 LE entspricht 1m).

Zwei U-Boote U_1 und U_2 bewegen sich geradlinig mit jeweils konstanter Geschwindigkeit.

Die Position von U_1 zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 140 \\ 105 \\ -170 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ -30 \end{pmatrix} \quad (t \text{ in Minuten seit Beginn der Beobachtung}).$$

U_2 befindet sich zu Beobachtungsbeginn im Punkt A(68|135|-68) und erreicht nach drei Minuten den Punkt B(-202|-405|-248).

a) Wie weit bewegt sich U_1 in einer Minute?

Woran erkennt man, dass sich U_1 von der Meeresoberfläche wegbewegt?

Welchen Winkel bildet die Route von U_1 mit der Meeresoberfläche?

b) Berechne die Geschwindigkeit von U_2 in $\frac{\text{m}}{\text{min}}$.

Begründe, dass sich die Position von U_2 zum Zeitpunkt t beschreiben lässt durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 68 \\ 135 \\ -68 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -90 \\ -180 \\ -60 \end{pmatrix}.$$

Zu welchem Zeitpunkt befinden sich beide U-Boote in gleicher Tiefe?

c) Welchen Abstand haben die beiden U-Boote zu Beobachtungsbeginn?

Aus Sicherheitsgründen dürfen sich die beiden U-Boote zu keinem Zeitpunkt näher als 100 m kommen. Wird dieser Sicherheitsabstand eingehalten?

d) Die Routen der beiden U-Boote werden von einem Satelliten ohne Berücksichtigung der Tiefe als Strecken aufgezeichnet.

Diese beiden Strecken schneiden sich.

Wie groß ist der Höhenunterschied der zwei Routen an dieser Stelle?

Aufgabe 19: (abgewandelte Abituraufgabe 2013)

Ein Würfel besitzt die Eckpunkte $O(0|0|0)$, $P(6|0|0)$, $Q(0|6|0)$ und $R(0|0|6)$.
Gegeben ist außerdem die Ebene $E: 3x_2 + x_3 = 8$.

- a) Stelle den Würfel und die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.
Berechne den Winkel, den die Ebene E mit der $x_1 - x_2$ -Ebene einschließt.
Bestimme den Abstand von E zur x_1 -Achse.

- b) Die Ebene E gehört zu einer Ebenenschar.
Diese Schar ist gegeben durch $E_a: 3x_2 + x_3 = a$ mit $a \in \mathbb{R}$

Welche Lage haben die Ebenen der Schar zueinander?

Für welche Werte von a hat der Punkt $S(6|6|6)$ den Abstand $\sqrt{10}$ von der Ebene E_a ?

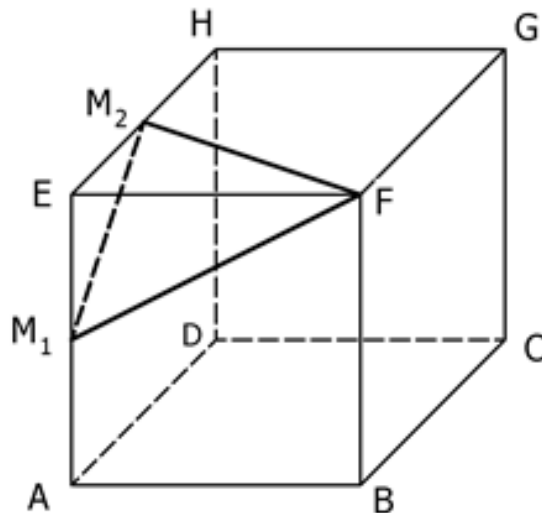
Für welche Werte von a hat die Ebene E_a gemeinsame Punkte mit dem Würfel?

Aufgabe 20: (abgewandelte Abituraufgabe 2013)

In einem würfelförmigen Ausstellungsraum mit der Kantenlänge 8 Meter ist ein dreieckiges Segeltuch aufgespannt. Es ist im Punkt F sowie in den Kantenmitten M_1 und M_2 befestigt (siehe Abbildung).

Es wird angenommen, dass das Segeltuch nicht durchhängt.

In einem Koordinatensystem stellen die Punkte $A(8|0|0)$, $C(0|8|0)$ und $H(0|0|8)$ die entsprechenden Ecken des Raumes dar.



- a) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene S, in der das Segeltuch liegt. Zeige, dass das Segeltuch die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat. Berechne den Flächeninhalt des Segeltuchs. Welchen Abstand hat das Segeltuch von der Ecke E?

- b) Auf der Diagonalen AC steht eine 6 Meter hohe Stange senkrecht auf dem Boden. Das obere Ende der Stange berührt das Segeltuch. In welchem Punkt befindet sich das untere Ende der Stange?

Aufgabe 21: (abgewandelte Abituraufgabe 2014)

Gegeben sind die Punkte $A(5|-5|0)$, $B(5|5|0)$, $C(-5|5|0)$ und $D(-5|-5|0)$.

Das Quadrat ABCD ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze $S(0|0|12)$.

- a) Die Seitenfläche BCS liegt in der Ebene E.
Bestimme eine Koordinatengleichung von E.
Berechne den Winkel, der von der Seitenfläche BCS und der Grundfläche der Pyramide eingeschlossen wird.
Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks BCS.
- b) Betrachtet werden nun Quader, die jeweils vier Eckpunkte auf den Pyramidenkanten und vier Eckpunkte in der Grundfläche der Pyramide haben.
Einer dieser Quader hat den Eckpunkt $Q(2,5|2,5|0)$.
Berechne sein Volumen.
Bei einem anderen dieser Quader handelt es sich um einen Würfel.
Welche Koordinaten hat dessen Eckpunkt auf der Kante BS?

Aufgabe 22: (abgewandelte Abituraufgabe 2014)

An einer rechteckigen Platte mit den Eckpunkten $A(10|6|0)$, $B(0|6|0)$, $C(0|0|3)$ und $D(10|0|3)$ ist im Punkt $F(5|6|0)$ ein 2 m langer Stab befestigt, der in positive x_3 -Richtung zeigt.

Eine punktförmige Lichtquelle befindet sich zunächst im Punkt $L(8|10|2)$.
(Koordinatenangaben in m).

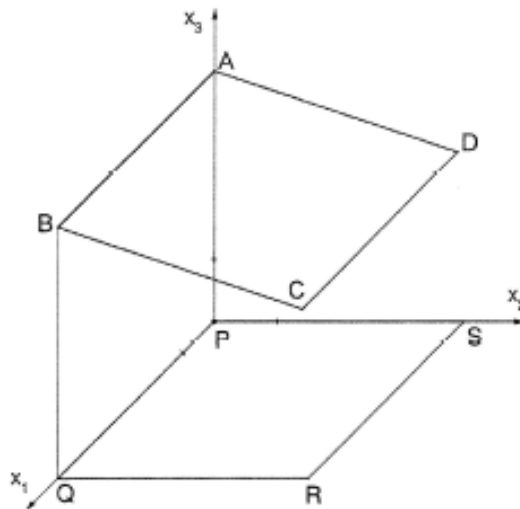
- a) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E , in der die Platte liegt.
Stelle die Platte, den Stab und die Lichtquelle in einem Koordinatensystem dar.
Berechne den Winkel zwischen dem Stab und der Platte.
- b) Der Stab wirft einen Schatten auf die Platte.
Bestimme den Schattenpunkt des oberen Endes des Stabes.
Begründe, dass der Schatten vollständig auf der Platte liegt.
- c) Die Lichtquelle bewegt sich von L aus auf einer zur $x_1 - x_2$ -Ebene parallelen Kreisbahn, deren Mittelpunkt das obere Ende des Stabes ist.
Dabei kollidiert die Lichtquelle mit der Platte.
Berechne die Koordinaten der beiden möglichen Kollisionspunkte.

Aufgabe 23: (abgewandelte Abituraufgabe 2015)

Über einer Terrasse ist als Sonnenschutz eine Markise an einer Hauswand befestigt. In einem Koordinatensystem stellen die Punkte $P(0|0|0)$, $Q(5|0|0)$, $R(5|4|0)$, $S(0|4|0)$ die Eckpunkte der Terrasse dar.

Die Markise wird durch das Rechteck mit den Eckpunkten $A(0|0|4)$, $B(5|0|4)$, $C(5|3,9|2,7)$, $D(0|3,9|2,7)$ beschrieben (alle Koordinatenangaben in Meter).

Die Lage der Hauswand wird durch die x_1x_3 – Ebene beschrieben.



- a) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, welche die Lage der Markise beschreibt. Berechne den Winkel zwischen Markise und Hauswand.
- b) In der Mitte zwischen Q und R steht eine 30cm hohe Stehlampe. Am Markisenrand CD wird ein senkrecht nach unten hängender Regenschutz angebracht, der genau bis auf die Terrasse reicht. Bei starkem Wind schwingt er frei um CD. Kann der Regenschutz dabei die Stehlampe berühren? Welchen Abstand von der Hauswand darf die Stehlampe auf der Terrasse höchstens haben, damit dies nicht passiert?

- c) Die Sonne scheint und der Regenschutz wird entfernt. Die Richtung der

Sonnenstrahlen wird durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Begründe ohne Rechnung, dass die Terrasse nicht vollständig beschattet wird. Die Markise kann ein- und ausgefahren werden. Dabei bewegen sich die äußeren Eckpunkte der Markise längs der Geraden BC und AD. Die Markise wird nun so weit eingefahren, dass der Terrassenrand zwischen Q und R genau zur Hälfte im Schatten liegt.

Bestimme die neuen Koordinaten der äußeren Eckpunkte der Markise.

Aufgabe 24: (abgewandelte Abituraufgabe 2015)

Gegeben sind die Ebene E: $3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 16$ und eine Geradenschar durch

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R}$$

- a) Bestimme den Schnittpunkt der Geraden g_4 mit der Ebene E.
Welche Gerade der Schar ist orthogonal zu g_4 ?
Berechne den Schnittwinkel von g_4 und E.
- b) Begründe, dass alle Geraden g_a in der Ebene F: $x_3 = 1$ liegen.
Es gibt eine Gerade h, die durch den Punkt $P(5|1|1)$ geht und in F liegt, aber nicht zur Schar gehört.
Bestimme eine Gleichung der Geraden h.

Aufgabe 25: (abgewandelte Abituraufgabe 2016)

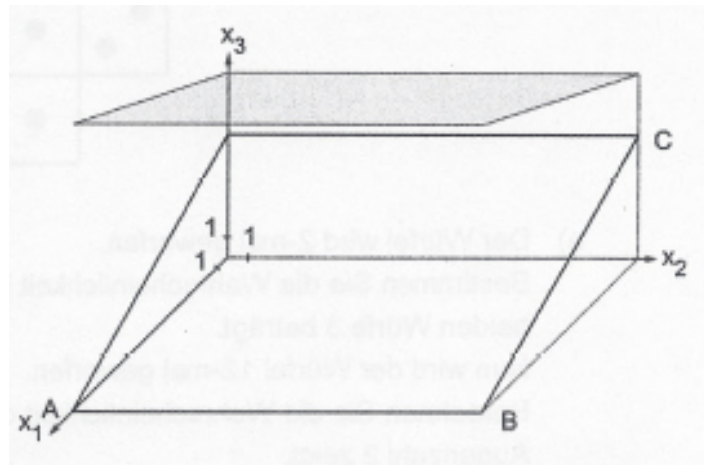
In einem Koordinatensystem beschreiben die Punkte $A(15|0|0)$, $B(15|20|0)$ und $C(0|20|6)$ Eckpunkte der rechteckigen Nutzfläche einer Tribüne (alle Koordinatenangaben in Meter).

Die $x_1 - x_2$ - Ebene stellt den Erdboden dar.

Die Eckpunkte der Dachflächen liegen vertikal über den Eckpunkten der Nutzfläche.

Die Dachfläche liegt in der durch $E: x_1 - 3x_3 = -27$ beschriebenen Ebene

(siehe Abbildung)



- a) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Nutzfläche liegt. Berechne den Neigungswinkel der Nutzfläche gegen den Erdboden. Ermittle den Inhalt der Nutzfläche.
- b) Aus Sicherheitsgründen muss die senkrecht zum Erdboden verlaufende Rückwand zwischen der Nutzfläche und der Dachfläche mindestens 2,5 m hoch sein. Überprüfe, ob diese Bedingung erfüllt ist. Zur Installation von Lautsprechern wird eine 5,2 m lange, senkrecht zum Erdboden verlaufende Stütze montiert. Ihre Enden werden an der Kante BC und am Dach der Tribüne fixiert. Berechne die Koordinaten des Punktes auf der Kante BC, in dem das untere Ende der Stütze fixiert wird.

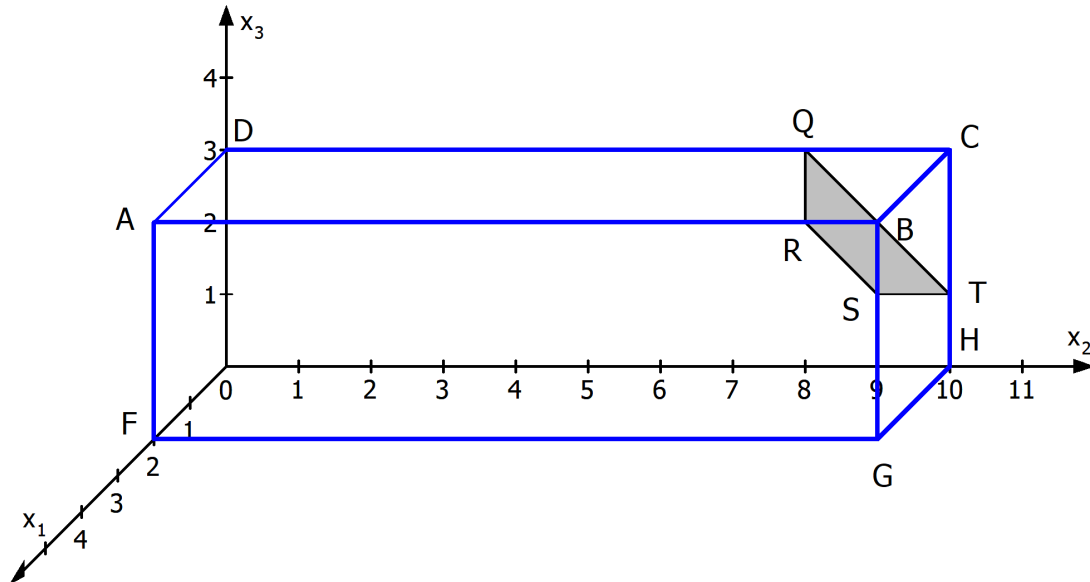
Aufgabe 26: (abgewandelte Abituraufgabe 2016)

Die Punkte $A(0|-6|0)$, $B(6|0|0)$, $C(0|6|0)$ und $S(0|0|5)$ sind die Eckpunkte der Pyramide $ABCS$. Der Punkt M_1 ist der Mittelpunkt der Kante AS und M_2 ist der Mittelpunkt der Kante CS . Die Ebene E verläuft durch M_1 , M_2 und B .

- a) Die Ebene E schneidet die Pyramide in einer Schnittfläche.
Stelle die Pyramide und Schnittfläche in einem Koordinatensystem dar.
Berechne den Umfang der Schnittfläche.
Bestimme eine Koordinatengleichung von E .
- b) Der Punkt Q liegt auf der Kante BS und bildet mit M_1 und M_2 ein rechtwinkliges Dreieck.
Bestimme die Koordinaten des Punktes Q .
- c) Der Punkt Z liegt in der $x_1 - x_3$ -Ebene und im Innern der Pyramide $ABCS$.
Er hat von der Grundfläche ABC , der Seitenfläche ACS und von E den gleichen Abstand. Bestimme die Koordinaten von Z .

Aufgabe 27: (abgewandelte Abituraufgabe 2017)

Ein Künstler teilt einen quaderförmigen Container durch einen ebenen Schnitt in einen großen und einen kleinen Teilkörper. Der Container wird in einem Koordinatensystem als Quader mit den Eckpunkten $A(2|0|3)$, $B(2|10|3)$, $C(0|10|3)$, D , F , $G(2|10|0)$, H und $O(0|0|0)$ dargestellt (Koordinatenangaben in Meter)



Die Ebene E schneidet die Kanten des Quaders in den Punkten $R(2|9|3)$, $S(2|10|2)$, $T(0|10|1)$ und $Q(0|8|3)$. Der kleine Teilkörper hat also die Eckpunkte Q , R , S , T , B , C .

- Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E.
Begründe, dass es sich bei dem Viereck $QRST$ um ein Trapez handelt.
Berechne den Flächeninhalt des Trapezes $QRST$.
- Der kleine Teilkörper wird mit den Schnittkanten nach unten auf den großen Teilkörper gestellt.
Bestimme die Höhe des zusammengesetzten Körpers.
- Der Container besitzt eine Tür, die im geschlossenen Zustand durch das Viereck $ODAF$ dargestellt wird. Die Tür ist drehbar um die Kante, die durch die Strecke OD beschrieben wird.
Jede Ebene $T_a: ax_1 + x_2 = 0$; $a \geq 0$ beschreibt eine mögliche Stellung dieser Tür.
Bestimme den exakten Wert für a , für den der Öffnungswinkel der Tür 30° beträgt.

Aufgabe 28: (abgewandelte Abituraufgabe 2017)

Zwei Flugzeuge F_1 und F_2 bewegen sich geradlinig mit jeweils konstanter Geschwindigkeit über dem offenen Meer. In einem Koordinatensystem beschreibt dabei die $x_1 - x_2$ -Ebene die Meeresoberfläche. Die Beobachtung der Flugzeuge beginnt um 14.00 Uhr.

Die Flugbahn von F_1 wird beschrieben durch die Gleichung

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 3,4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0,3 \end{pmatrix} \quad (t \text{ in Minuten nach Beobachtungsbeginn})$$

Der Punkt $P(-17|54|3,2)$ beschreibt die Position von F_2 um 14.00 Uhr, der Punkt $Q(1|36|3,8)$ die Position von F_2 um 14.03 Uhr (1 LE entspricht 1 km)

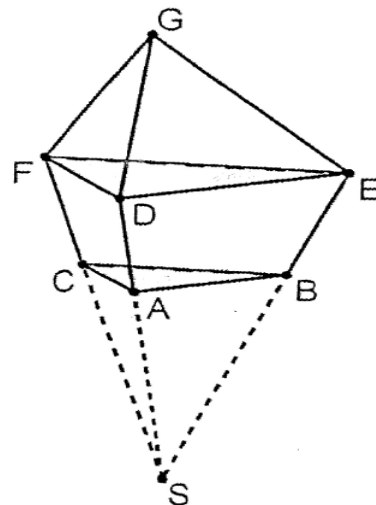
- a) Berechne die Geschwindigkeit von F_1 in km/min.
Bestimme den Zeitpunkt, zu dem F_1 eine Höhe von 4,9 km erreicht.
Berechne die Weite des Winkels, mit dem das Flugzeug F_2 steigt.
- b) Die Flugbahnen von F_1 und F_2 schneiden sich.
Aus Sicherheitsgründen müssen die Zeitpunkte, zu denen die Flugzeuge den Schnittpunkt ihrer Flugbahnen durchfliegen, mindestens eine Minute auseinanderliegen.
Prüfe, ob diese Bedingung erfüllt ist.
- c) Die Position eines Ballons wird durch den Punkt $B(6|43|4,3)$ beschrieben.
Beschreibe ein Verfahren, mit dem man den Zeitpunkt t_0 berechnen kann, zu dem beide Flugzeuge denselben Abstand vom Ballon haben.
Die Punkte auf der Meeresoberfläche, die zum Zeitpunkt t_0 ebenfalls von beiden Flugzeugen gleich weit entfernt sind, liegen auf einer Geraden.
Beschreibe ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung dieser Geraden bestimmen kann.

Aufgabe 29: (abgewandelte Abituraufgabe 2018)

Das Gebäude eines Museums kann modellhaft durch den abgebildeten Körper ABCDEFG dargestellt werden. Die obere Etage des Museums entspricht der Pyramide DEFG, die untere Etage dem Körper ABCDEF, der Teil der Pyramide DEFS ist.

Die Ebene, in der das Dreieck ABC liegt, beschreibt die Horizontale. Das Dreieck DEF liegt parallel zu dieser Ebene. In einem kartesischen Koordinatensystem gilt für die Lage einiger der genannten Punkte: A(-5|5|0), B(-5|25|0), D(0|0|15), E(0|30|15), F(-25|5|15) und G(-10|10|35).

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1m in der Realität.



- a) Weise nach, dass die Bodenfläche der oberen Etage nicht rechtwinklig ist. Die folgenden Rechnungen zeigen ein mögliches Vorgehen zur Ermittlung der Koordinaten von S:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -15 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = s = 3$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ -30 \end{pmatrix}, \text{ d.h. } S(-15|15|-30)$$

Erläutere die Schritte des dargestellten Vorgehens.

- b) Berechne den Inhalt der Bodenfläche der oberen Etage.
Für die obere Etage wird eine Anlage zur Entfeuchtung der Luft installiert, die für jeweils 100m^3 Rauminhalt eine elektrische Leistung von 0,8 Kilowatt benötigt. Weise nach, dass zur Entfeuchtung der Luft eine Leistung von 25 Kilowatt ausreichend ist.
- c) An einer Metallstange, deren Enden durch die Punkte G und R(-5|5|15) dargestellt werden, ist ein Scheinwerfer befestigt, der sich entlang der Stange verschieben lässt.
Die Größe des Scheinwerfers soll vernachlässigt werden. Der Scheinwerfer soll aus einer Entfernung von 8m diejenige Wand beleuchten, die im Modell durch das Dreieck EFG dargestellt wird.
Berechne die Koordinaten des Punktes, der die Position des Scheinwerfers im Modell beschreibt.

Aufgabe 30: (abgewandelte Abituraufgabe 2018)

Gegeben sind die Ebenen E: $4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$ und F: $2x_1 + x_3 = 4$.

- a) Stelle die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.
Zeige, dass E nicht orthogonal zu F ist.
Bestimme eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und F.

Die Ebenen E und F gehören zur Ebenenschar $E_a : ax_1 + (a - 2)x_2 + x_3 = 4$, $a \in \mathbb{R}$

- b) Gib an, für welche Werte von a die zugehörige Ebene E_a alle drei Koordinatenachsen schneidet.
Für diese Werte von a bilden die Spurpunkte von E_a zusammen mit dem Koordinatenursprung die Eckpunkte einer Pyramide.
Bestimme einen Wert für a so, dass das Pyramidenvolumen 6 VE beträgt.
- c) Bestimme den Wert für a so, dass der Abstand von $P(0|0|1)$ zu E_a maximal ist.
Begründe, dass die Schar keine zueinander parallele Ebenen enthält.