

Aufgabe 1: (abgewandelte Abituraufgabe 2013)**Teil 1:**

Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter mindestens zwei Gewinnlose?

Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der gezogenen Gewinnlose an.
 X ist binomialverteilt mit $p = 0,1$ und $n = 3$.

Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Gewinnlose:
 $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0,028$ (WTR)

Die Wahrscheinlichkeit, dass unter 3 Losen mindestens 2 Gewinnlose sind, beträgt 2,8%.

Wie viele Lose hätte man mindestens kaufen müssen, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Gewinnlose über 50% liegt?

Die Zufallsgröße Y gibt die Anzahl der gezogenen Gewinnlose an.
 Y ist binomialverteilt mit $p = 0,1$ und unbekanntem n ,

Bedingung: $P(Y \geq 2) > 0,5$
 $\Rightarrow 1 - P(Y \leq 1) > 0,5$
 $\Rightarrow P(Y \leq 1) < 0,5$

WTR:
 $n = 16: P(Y \leq 1) \approx 0,515$
 $n = 17: P(Y \leq 1) \approx 0,482$

Man muss mindestens 17 Lose kaufen, damit die Wahrscheinlichkeit für zwei Gewinnlose über 50% liegt.

Teil 2:

a) *Weise nach, dass das Spiel fair ist.*

Das Spiel ist fair, wenn die erwartete Auszahlung genauso hoch ist wie der Einsatz.

Berechnung der erwarteten Auszahlung:
 Die Zufallsgröße X gebe die Auszahlung an.

$$\text{Stern - Stern: } P(X = 2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$\text{Diamant - Diamant: } P(X = 0,85) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$$

$$\text{Kleeblatt – Kleeblatt: } P(X = 0,20) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Erwartungswert von X: } E(X) = 2\text{€} \cdot \frac{1}{36} + 0,85\text{€} \cdot \frac{1}{9} + 0,2\text{€} \cdot \frac{1}{4} = 0,20\text{€}$$

Da die erwartete Auszahlung dem Spieleinsatz entspricht, ist das Spiel fair.

Berechne diesen neuen Auszahlungsbetrag.

Bedingung, dass der Veranstalter auf lange Sicht pro Spiel 0,05 € Gewinn erzielt:
 $E(X) = 0,15\text{€}$

Der Auszahlungsbetrag für „Diamant – Diamant“ sei a.

$$E(X) = 2\text{€} \cdot \frac{1}{36} + a \cdot \frac{1}{9} + 0,20\text{€} \cdot \frac{1}{4} = 0,15 \text{ €}$$

$$\Leftrightarrow \frac{19}{180} + \frac{1}{9}a = 0,15 \quad \Leftrightarrow a = 0,40\text{€}$$

Die Auszahlung für „Diamant – Diamant“ muss künftig 0,40 € betragen.

b) Nullhypothese: $H_0 : p \geq \frac{1}{36}$

Alternativhypothese: $H_1 : p < \frac{1}{36}$

Es handelt sich um einen linksseitigen Hypothesentest mit Signifikanzniveau 5%.

Der Ablehnungsbereich lautet $\bar{A} = \{0, \dots, g\}$.

Die Zufallsgröße X gibt an, wie oft das Ergebnis „Stern – Stern“ eintritt.

X ist binomialverteilt mit $n = 500$ und $p = \frac{1}{36}$.

Gesucht ist der maximale Wert von g, so dass gilt: $P(X \leq g) \leq 0,05$

WTR:

$$P(X \leq 7) \approx 0,032 \quad \text{und} \quad P(X \leq 8) \approx 0,063$$

Damit ist $g = 7$ und der Ablehnungsbereich ist $\bar{A} = \{0, \dots, 7\}$

Entscheidungsregel:

Wenn bei 500 Spielen höchstens siebenmal „Stern – Stern“ erscheint, wird die Nullhypothese abgelehnt; andernfalls wird die Nullhypothese nicht abgelehnt.

Aufgabe 2: (abgewandelte Abituraufgabe 2014)**Teil 1:**

- a) *Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 12mal eine schwarze Kugel gezogen wird.*

Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln. X ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0,6$.

$$P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) \approx 0,596 \quad (\text{WTR})$$

Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 schwarze Kugeln gezogen werden, und zwar bei direkt aufeinander folgenden Zügen.

Diese Wahrscheinlichkeit kann nicht mit der Binomialverteilung berechnet werden, da vorgegeben ist, an welchen möglichen Stellen (nämlich hintereinander) die 2 schwarzen Kugeln zu ziehen sind.

Angenommen, die beiden schwarzen Kugeln werden gleich am Anfang gezogen: Dann beträgt die Wahrscheinlichkeit $0,3^2 \cdot 0,7^6$

Da die beiden schwarzen Kugeln aber auch während der Ziehung oder am Ende der Ziehung gezogen werden können, muss man berechnen, wie viele Möglichkeiten es gibt, die beiden schwarzen Kugeln auf die 8 Stellen zu verteilen. Es gibt hierfür 7 Möglichkeiten.

Daher gilt:

$$P(\text{genau 2 schwarze Kugeln direkt hintereinander}) = 7 \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^6 \approx 0,074$$

- b) *Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Kugel schwarz?*

Folgende Fälle müssen betrachtet werden:

A) Aus G1 werden 2 schwarze Kugeln gezogen.

$$P(\text{Fall A}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$$

Es sind 5 schwarze Kugeln in G2: $P(\text{schwarz aus G2}) = \frac{5}{12}$

B) Aus G1 wird 1 schwarze und 1 weiße Kugel gezogen.

$$P(\text{Fall B}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{8}{15}$$

Es sind 4 schwarze Kugeln in G2: $P(\text{schwarz aus G2}) = \frac{4}{12}$

C) Aus G1 werden 2 weiße Kugeln gezogen.

$$P(\text{Fall C}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

Es sind 3 schwarze Kugeln in G2: $P(\text{schwarz aus G2}) = \frac{3}{12}$

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P(\text{schwarze Kugel aus G2}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{12} + \frac{8}{15} \cdot \frac{4}{12} + \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{12} = 0,35$$

Teil 2:

a) *Berechne* $P(X \leq 30)$.

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 800$ und $p = 0,05$.

$$P(X \leq 30) \approx 0,057 \quad (\text{WTR})$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht der Wert von X um weniger als 10 vom Erwartungswert von X ab?

Erwartungswert von X : $E(X) = n \cdot p = 800 \cdot 0,05 = 40$.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(30 < X < 50) = P(31 \leq X \leq 49)$:

$$P(31 \leq X \leq 49) = P(X \leq 49) - P(X \leq 30) \approx 0,9347 - 0,057 = 0,878 \quad (\text{WTR})$$

b) *Bei welchen Anzahlen fehlerhafter Stifte entscheidet man sich gegen die Hypothese, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit maximal 5% betragen soll?*

Nullhypothese: $H_0 : p \leq 0,02$

Alternativhypothese: $H_1 : p > 0,02$

Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test mit Signifikanzniveau 5%.

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{g, \dots, n\}$

Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der fehlerhaften Stifte.
 X ist binomialverteilt mit $n = 800$ und $p = 0,02$.

Gesucht ist der kleinste Wert von g , so dass gilt: $P(X \geq g) \leq 0,05$

umgeformt: $P(X \leq g - 1) \geq 0,95$

$$\text{WTR: } P(X \leq 22) \approx 0,944 \quad \text{und} \quad P(X \leq 23) \approx 0,965$$

Damit ist $g - 1 = 23 \Rightarrow g = 24$

Der Ablehnungsbereich ist $\bar{A} = \{24, \dots, 800\}$

Bei mindestens 24 fehlerhaften Stiften entscheidet man sich gegen die Nullhypothese.

Aufgabe 3: (abgewandelte Abituraufgabe 2015)**Teil 1:**

Formuliere die zugehörige Entscheidungsregel in Worten.

Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der keimfähigen Weizenkörner.

Nullhypothese $H_0 : p \geq 0,8$

Alternativhypothese $H_1 : p < 0,8$

Es handelt sich um einen linksseitigen Test mit Signifikanzniveau 10%.

Ablehnungsbereich $\bar{A} = \{0, \dots, g\}$.

Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der keimfähigen Weizenkörner.

X ist binomialverteilt mit $n = 500$ und $p = 0,8$.

Gesucht ist die größte Zahl g , so dass gilt: $P(X \leq g) \leq 0,1$

WTR: $P(X \leq 387) \approx 0,083$ und $P(X \leq 388) \approx 0,1004$

Daraus folgt $g = 387$.

Ablehnungsbereich $\bar{A} = \{0, \dots, 387\}$

Entscheidungsregel:

Wenn von den 500 Weizenkörnern höchstens 387 keimfähig sind, wird die Nullhypothese verworfen, andernfalls wird sie nicht verworfen.

Wie groß ist in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei obigem Test die Nullhypothese fälschlicherweise verworfen wird?

Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der keimfähigen Weizenkörner.

Y ist binomialverteilt mit $n = 500$ und $p = 0,82$.

Die Nullhypothese wird fälschlicherweise verworfen, wenn die Trefferanzahl in den Ablehnungsbereich fällt.

$P(Y \leq 387) \approx 0,0053$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese fälschlicherweise verworfen wird, beträgt ca. 0,5%.

Teil 2:

- a) *Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass der Athlet stehend bei fünf Schüssen genau vier Mal trifft.*

Die Zufallsgröße X ist die Anzahl der Treffer des stehenden Athleten.
 X ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0,88$.
 $P(\text{genau vier Treffer}) = P(X = 4) \approx 0,3598$

- b) *Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Athlet im gesamten Wettbewerb höchstens einmal eine Strafrunde laufen muss.*

Der Athlet muss in folgenden Fällen höchstens eine Strafrunde laufen:

- A: Der Athlet trifft immer.
 B: Der Athlet trifft liegend genau viermal und stehend immer.
 C: Der Athlet trifft stehend genau viermal und liegend immer.

$$P(A) = 0,88^5 \cdot 0,93^5 \approx 0,367$$

$$P(B) = 5 \cdot 0,93^4 \cdot 0,07 \cdot 0,88^5 \approx 0,138$$

$$P(C) = 5 \cdot 0,88^4 \cdot 0,12 \cdot 0,93^5 \approx 0,25$$

$$P(\text{höchstens eine Strafrunde}) = 0,367 + 0,138 + 0,25 = 0,755$$

- c) *Welche Trefferwahrscheinlichkeit muss er dafür mindestens erreichen?*

Die Zufallsgröße X ist die Anzahl der Treffer des stehenden Athleten.
 X ist binomialverteilt mit $n = 5$ und unbekanntem p .

$$\text{Bedingung: } P(X \geq 4) > 0,95 \quad \Rightarrow \quad P(X \leq 3) < 0,05$$

WTR:

$$p = 0,92: \quad P(X \leq 3) \approx 0,054$$

$$p = 0,93: \quad P(X \leq 3) \approx 0,042$$

Der Athlet muss eine Trefferwahrscheinlichkeit von mindestens 93% erreichen.

Aufgabe 4: (abgewandelte Abituraufgabe 2016)**Teil 1:**

- a) *Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme der beiden Würfe 3 beträgt.*

$$P(\text{Augensumme } 3) = P(1 \text{ und } 2) + P(2 \text{ und } 1) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{3}$$

Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er mindestens 4-mal die Augenzahl 2 zeigt.

Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der Würfe, bei denen die Augenzahl 2 fällt.

X ist binomialverteilt mit $n = 12$ und $p = \frac{1}{3}$.

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 0,607 \quad (\text{WTR})$$

Auf wie vielen Seiten des Würfels muss dann die Augenzahl 3 mindestens stehen?

Die Zufallsgröße Y sei die Anzahl der Würfe, bei denen die Augenzahl 3 fällt. Y ist binomialverteilt mit $n = 12$ und unbekanntem p .

Es soll gelten: $P(Y \geq 4) \geq 0,99$ bzw. $P(Y \leq 3) \leq 0,01$

WTR:

3 Seiten mit Augenzahl 3: $p = \frac{3}{6}$ mit $P(Y \leq 3) \approx 0,073$

4 Seiten mit Augenzahl 4: $p = \frac{4}{6}$ mit $P(Y \leq 3) \approx 0,004$

Damit müssen mindestens 4 Seiten des Würfels die Augenzahl "3" besitzen.

- b) *Formuliere die zugehörige Entscheidungsregel in Worten.*

Nullhypothese: $H_0 : p \leq \frac{1}{6}$

Alternativhypothese: $H_1 : p > \frac{1}{6}$

Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test mit einem Signifikanzniveau von 1%.

Der Ablehnungsbereich ist $\bar{A} = \{g, \dots, n\}$.

Die Zufallsgröße X gibt an, wie oft bei 100 Würfeln bei Augenzahl 3 fällt.

X ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = \frac{1}{6}$.

Gesucht ist ein minimaler Wert von g , so dass gilt: $P(X \geq g) \leq 0,01$
bzw. $P(X \leq g-1) \geq 0,99$

WTR: $P(X \leq 25) \approx 0,988$ und $P(X \leq 26) \approx 0,994$

$g-1 = 26 \Rightarrow g = 27$

Ablehnungsbereich $\bar{A} = \{27, \dots, 100\}$

Entscheidungsregel:

Wenn die Augenzahl 3 mindestens 27mal fällt, wird die Nullhypothese verworfen, andernfalls wird sie nicht verworfen.

Teil 2:

Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend mindestens 6 Anfängerpaare und höchstens 3 Fortgeschrittenenpaare anwesend sind.

Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der anwesenden Fortgeschrittenenpaare an.
 X ist binomialverteilt mit $n = 4$ und $p = 0,75$.

Die Zufallsgröße Y gibt die Anzahl der anwesenden Anfängerpaare an,
 Y ist binomialverteilt mit $n = 8$ und $p = 0,90$.

$P(\text{alle 4 Fortgeschrittenenpaare sind anwesend})$:
 $P(X = 4) \approx 0,316$ (WTR)

$P(\text{mindestens 6 Anfängerpaare und höchstens 3 Fortgeschrittenenpaare})$:

$P(Y \geq 6) \cdot P(X \leq 3) = (1 - P(Y \leq 5)) \cdot P(X \leq 3) \approx 0,962 \cdot 0,684 = 0,658$ (WTR)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend mindestens 11 Paare anwesend sind?

Mindestens 11 Paare sind anwesend wenn:

8 Anfängerpaare und 4 Fortgeschrittenenpaare anwesend sind oder
8 Anfängerpaare und 3 Fortgeschrittenenpaare anwesend sind oder
7 Anfängerpaare und 4 Fortgeschrittenenpaare anwesend sind

$P(Y = 8) \cdot P(X = 4) + P(Y = 8) \cdot P(X = 3) + P(Y = 7) \cdot P(X = 4)$
 $= \approx 0,43 \cdot 0,316 + 0,43 \cdot 0,422 + 0,383 \cdot 0,316 = 0,438$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 11 Paare anwesend sind, beträgt ca. 44%.

Aufgabe 5: (abgewandelte Abituraufgabe 2017)

a) Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A:

Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Autos, die silber oder grau sind.

X ist binomialverteilt mit $n = 80$ und $p = 0,299$.

$$P(A) = P(X = 22) \approx 0,089 \quad (\text{WTR})$$

Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B:

Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der Autos, die schwarz sind.

X ist binomialverteilt mit $n = 80$ und $p = 0,288$.

$$P(B) = P(Y \geq 33) = 1 - P(Y \leq 32) \approx 0,011 \quad (\text{WTR})$$

Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C:

Die Zufallsgröße W beschreibt die Anzahl der Autos, die keine der angegebenen Farben besitzen.

Die Zufallsgröße Z beschreibt die Anzahl der Autos, die schwarz sind.

W ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 1 - 0,299 - 0,288 - 0,151 = 0,262$.

Z ist binomialverteilt mit $n = 70$ und $p = 0,288$.

$$P(C) = P(W \geq 3) \cdot P(Z \leq 20) = (1 - P(W \leq 2)) \cdot P(Z \leq 20) \approx 0,51 \cdot 0,543 = 0,277 \quad (\text{WTR})$$

b) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der schwarzen Autos.

X ist binomialverteilt mit $n = 100$ und unbekanntem Parameter p.

$$\text{Bedingung: } P(X \geq 28) \geq 0,95 \Rightarrow P(X \leq 27) \leq 0,05$$

WTR:

Mit $p = 0,35$ gilt $P(X \leq 27) \approx 0,056$

Mit $p = 0,36$ gilt $P(X \leq 27) \approx 0,036$

Es müssen mindestens 36% der Autos schwarz sein.

c) Das Spiel ist genau dann fair, wenn die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn für beide Kinder jeweils 0,5 beträgt (da beide Kinder jeweils denselben Gewinn in Form eines Gummibärchens erhalten).

$P(\text{von vier Autos sind mindestens drei hintereinander nicht schwarz}) =$

$$P(\text{ssss}) + P(\text{ssss}) + P(\text{ssss}) = 0,712^3 \cdot 0,288 + 0,712^4 + 0,288 \cdot 0,712^3 \approx 0,465 \neq 0,5$$

Das Spiel ist nicht fair.

- d) Nullhypothese $H_0 : p \leq 0,151$
Alternativhypothese: $H_1 : p > 0,151$

Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test mit Signifikanzniveau 10%.
Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der weißen Autos an.

X ist binomialverteilt mit $n = 500$ und $p = 0,151$.

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{g, \dots, n\}$

Gesucht ist der minimale Wert von g mit $P(X \geq g) \leq 0,1$
umgeformt: $P(X \leq g-1) \geq 0,9$

WTR: $P(X \leq 85) \approx 0,893$ und $P(X \leq 86) \approx 0,913$
Es gilt $g-1 = 86 \Rightarrow g = 87$

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{87, \dots, 500\}$

Entscheidungsregel:
Sind unter 500 Autos mindestens 87 weiße Autos, so wird die Nullhypothese verworfen, andernfalls wird sie nicht verworfen.

Aufgabe 6: (abgewandelte Abituraufgabe 2017)

a) Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A:

Die Zufallsgröße X beschreibt, wie oft die Zahl 1 angezeigt wird.

X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = \frac{2}{5}$.

$$P(A) = P(X = 5) \approx 0,201 \quad (\text{WTR})$$

Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B:

$$P(\text{Summe der Zahlen ist } 10) = P(2 \text{ und } 8) + P(8 \text{ und } 2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$$

Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C:

Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der Hauptgewinne.

Y ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

$$P(C) = P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 0,401 \quad (\text{WTR})$$

b) Die Zufallsvariable Y beschreibt die Anzahl der Hauptgewinne.

Y ist binomialverteilt mit unbekanntem n und $p = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

$$\text{Bedingung: } P(Y \geq 1) \geq 0,95 \Rightarrow P(Y = 0) \leq 0,05$$

WTR:

Für $n = 58$ ist $P(Y = 0) \approx 0,051$

Für $n = 59$ ist $P(Y = 0) \approx 0,048$

Man muss mindestens 59mal spielen.

c) Die Zufallsgröße X beschreibt die Auszahlung an den Spieler bei einem Spiel.

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

$$\text{Zweimal „1“: } P(X = 2\text{€}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$\text{Zweimal „2“: } P(X = 4\text{€}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Zweimal „8“: } P(X = 16\text{€}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

$$\text{Keine Auszahlung: } P(X = 0\text{€}) = 1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{5} - \frac{1}{20} = 0,65$$

$$E(X) = 2\text{€} \cdot \frac{1}{10} + 4\text{€} \cdot \frac{1}{5} + 16\text{€} \cdot \frac{1}{20} = 1,80\text{€}$$

Da der Spieleinsatz 2 € beträgt, verdient der Betreiber des Spiels auf lange Sicht durchschnittlich 20 Cent pro Spiel.

- d) Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der Hauptgewinne.
 Y ist binomialverteilt mit $n = 10$ und unbekanntem p .

$$\text{Es soll gelten: } P(Y \geq 1) \leq 0,25 \quad \Rightarrow \quad P(Y = 0) \geq 0,75$$

WTR:

$$\alpha = 50^\circ \Rightarrow p = \frac{1}{5} \cdot \frac{50}{360} = \frac{1}{36} : P(Y = 0) \approx 0,754$$

$$\alpha = 51^\circ \Rightarrow p = \frac{1}{5} \cdot \frac{51}{360} = \frac{17}{600} : P(Y = 0) \approx 0,7502$$

$$\alpha = 52^\circ \Rightarrow p = \frac{1}{5} \cdot \frac{52}{360} = \frac{13}{450} : P(Y = 0) \approx 0,746$$

Der Mittelpunktswinkel des Kreissektors mit der Zahl 8 darf beim zweiten Glücksrad eine Weite von 52° haben.

Aufgabe 7: (abgewandelte Abituraufgabe 2018)**Teil 1:**

- a) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der fehlerhaften Teile.
 X ist binomialverteilt mit $n = 800$ und $p = 0,04$.

$$P(A) = P(X = 30) \approx 0,069 \quad (\text{WTR})$$

5% der Teile entsprechen $800 \cdot 0,05 = 40$ Teile

$$P(B) = P(X \geq 40) = 1 - P(X \leq 39) \approx 0,091 \quad (\text{WTR})$$

- b) Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der fehlerfreien Teile.
 Y ist binomialverteilt mit unbekanntem n und $p = 0,96$.

$$\text{Es soll gelten: } P(Y \geq 100) \geq 0,95 \quad \Rightarrow \quad P(Y \leq 99) \leq 0,05$$

WTR:

$$n = 107: \quad P(Y \leq 99) \approx 0,066$$

$$n = 108: \quad P(Y \leq 99) \approx 0,03$$

Es müssen mindestens 108 Teile ausgewählt werden.

- c) Nullhypothese $H_0 : p \geq 0,04$
 Alternativhypothese $H_1 : p < 0,04$

Es handelt sich um einen linksseitigen Test mit Signifikanzniveau 5%.

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{0, \dots, g\}$

Die Zufallsgröße Z beschreibt die Anzahl der fehlerhaften Teile.
 Z ist binomialverteilt mit $n = 500$ und $p = 0,04$.

Gesucht ist der größte Wert von g , so dass gilt: $P(Z \leq g) \leq 0,05$

WTR:

$$\text{Für } g = 12 \text{ gilt } P(Z \leq g) \approx 0,036.$$

$$\text{Für } g = 13 \text{ gilt } P(Z \leq g) \approx 0,062.$$

Damit lautet der Ablehnungsbereich $\bar{A} = \{0, \dots, 12\}$

Entscheidungsregel:

Sind höchstens 12 Teile fehlerhaft, so wird die Nullhypothese abgelehnt,
 andernfalls wird sie nicht abgelehnt.

Teil 2:

a) Die Zufallsgröße X gebe die Auszahlung in Euro für den Spieler an.

Es gilt:

$$P(\text{dreimal gleiche Farbe}) = P(X = 10) = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{drei verschiedene Farben}) = P(X = a) = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{zwei gleiche Farben}) = P(X = 0) = \frac{4}{6}$$

Es soll gelten: $E(X) = 5$

$$E(X) = \frac{1}{6} \cdot 10 + \frac{1}{6} \cdot a = 5 \Rightarrow \frac{1}{6} a = \frac{10}{3} \Rightarrow a = 20$$

Bei drei verschiedenen Farben werden 20 Euro ausbezahlt.

b) Aus dem Baumdiagramm kann man entnehmen:

$$P(\text{rot}) = 2p$$

$$P(\text{grün}) = p$$

$$\text{Damit ist } P(\text{blau}) = 1 - p - 2p = 1 - 3p$$

$$P(\text{rrb}) = 0,036 \Rightarrow 2p \cdot 2p \cdot (1 - 3p) = 0,036$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt p , wobei für p gelten muss:

$$1 - 3p > 0,5 \Leftrightarrow p < \frac{1}{6}$$

Aufgabe 8: (abgewandelte Abituraufgabe 2018)

a) Wahrscheinlichkeit für eine Ziffer: $\frac{4}{10} = 0,4$

Wahrscheinlichkeit für einen Buchstaben: $\frac{6}{10} = 0,6$

$P(A) = P(5 \text{ Ziffern hintereinander}) = 0,4^5 = 0,01024$ (WTR)

Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der getippten Zifferntasten.
 X ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0,4$.

$P(B) = P(X \leq 3) \approx 0,913$ (WTR)

$P(C) = P(\text{egal, AFFE}) + P(\text{AFFE, egal}) = 1 \cdot 0,1^4 + 0,1^4 \cdot 1 = 0,0002$ (WTR)

Hinweis zu Ereignis C: Das Wort AFFE beginnt entweder beim ersten oder beim zweiten Tastaturanschlag.

- b) *Wie viele Buchstaben pro Versuchsreihe kann man dabei auf lange Sicht im Mittel erwarten?*

Die Zufallsgröße X gebe die Anzahl der getippten Buchstaben an.
 X ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0,6$.

Mittlere Anzahl Buchstaben auf lange Sicht: $E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0,6 = 12$

Auf lange Sicht kann man im Mittel 12 Buchstaben pro Versuchsreihe erwarten.

20% von 12 sind $0,2 \cdot 12 = 2,4$

$P(12 - 2,4 \leq X \leq 12 + 2,4) = P(10 \leq X \leq 14) = P(X \leq 14) - P(X \leq 9) \approx 0,874 - 0,128 = 0,746$

Wie viele Zifferntasten müssten mindestens hinzugefügt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 15 Buchstabentasten in einer Versuchsreihe getippt werden, auf unter 1% fällt?

Die Zufallsgröße Y gebe die Anzahl der getippten Buchstabentasten an.

Y ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = \frac{6}{10+x}$, wobei x die Anzahl der hinzugefügten Zifferntasten darstellt.

Es soll gelten: $P(Y \geq 15) < 0,01$, also $P(Y \leq 14) > 0,99$

WTR:

Für $x = 2$ gilt $P(Y \leq 14) \approx 0,979$

Für $x = 3$ gilt $P(Y \leq 14) \approx 0,991$

Es müssen mindestens 3 Zifferntasten hinzugefügt werden.

c) Nullhypothese $H_0 : p \leq 0,4$

Alternativhypothese: $H_1 : p > 0,4$

Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test mit Signifikanzniveau 1%.

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{g, \dots, n\}$

Die Zufallsgröße X gebe die Anzahl der getippten Zifferntasten an.

X ist binomialverteilt mit $n = 80$ und $p = 0,4$.

Es muss gelten: $P(X \geq g) \leq 0,01$ bzw. $P(X \leq g - 1) \geq 0,99$

WTR:

$P(X \leq 41) \approx 0,984$ und $P(X \leq 42) \approx 0,991$

$g - 1 = 42 \Rightarrow g = 43$

Der Ablehnungsbereich lautet $\bar{A} = \{43, \dots, 80\}$

Entscheidungsregel:

Tippt der Affe bei 80 Tastaturanschlägen mindestens 43mal eine Zifferntaste, so wird die Nullhypothese abgelehnt, andernfalls wird sie nicht abgelehnt.