

Aufgabe 1: (abgewandelte Abituraufgabe 2004)

a) Gib das Verhalten von K an für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$.

Für $x \rightarrow \pm\infty$ strebt $f(x) \rightarrow 1$, da $\frac{52}{x^2+16} \rightarrow 0$ strebt (Nennergrad > Zählergrad)

Die Gerade $y = 1$ ist die waagrechte Asymptote der Funktion.

Berechne die Wendestellen von K .

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$f(x) = 1 - 52 \cdot (x^2 + 16)^{-1}$$

$$f'(x) = 52 \cdot (x^2 + 16)^{-2} \cdot 2x = 104x \cdot (x^2 + 16)^{-2} = \frac{104x}{(x^2 + 16)^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 104 \cdot (x^2 + 16)^{-2} + 104x \cdot (-2) \cdot (x^2 + 16)^{-3} \cdot 2x \\ &= \frac{104}{(x^2 + 16)^2} - \frac{416x^2}{(x^2 + 16)^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0: \frac{104}{(x^2 + 16)^2} - \frac{416x^2}{(x^2 + 16)^3} = 0 \quad | \cdot (x^2 + 16)^3$$

$$\Leftrightarrow 104(x^2 + 16) - 416x^2 = 0$$

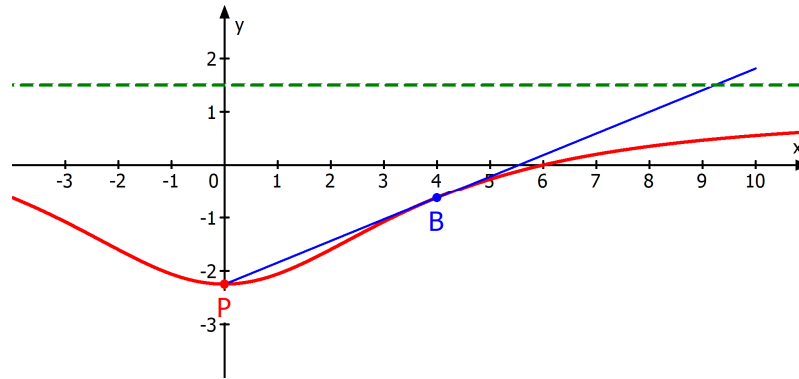
$$\Leftrightarrow -312x^2 + 1664 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{16}{3}}$$

Da in der Aufgabe vorgegeben ist, dass das Schaubild K zwei Wendepunkte besitzt muss die hinreichende Bedingung nicht überprüft werden.

b)



Der tiefste Punkt des Kanals liegt auf der y-Achse: $P(0|-2,25)$.
 Die Sichtlinie der Person entspricht der Tangente, die vom tiefsten Punkt P aus an das Schaubild K angelegt wird.

Der unbekannte Berührungspunkt hat die Koordinaten $B(u|f(u))$.
 Allgemeine Tangentengleichung in B: $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

Einsetzen von P in die Tangentengleichung:

$$\begin{aligned}
 -2,25 &= \frac{104u}{(u^2 + 16)^2} \cdot (0 - u) + 1 - \frac{52}{u^2 + 16} \quad | \cdot (u^2 + 16)^2 \\
 \Leftrightarrow -2,25(u^2 + 16)^2 &= -104u^2 + (u^2 + 16)^2 - 52(u^2 + 16) \\
 \Leftrightarrow -2,25u^4 - 72u^2 - 576 &= -104u^2 + u^4 + 32u^2 + 256 - 52u^2 - 832 \\
 \Leftrightarrow -3,25u^4 + 52u^2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow u^2 \cdot (-3,25u^2 + 52) &= 0
 \end{aligned}$$

Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt:

$$\begin{aligned}
 \text{I) } u^2 &= 0 \Rightarrow u = 0 \\
 \text{II) } -3,25u^2 + 52 &= 0 \Leftrightarrow u^2 = 16 \Rightarrow u = \pm 4
 \end{aligned}$$

Laut dem Schaubild oben ist die gesuchte Lösung $u = 4$.
 Die Lösung $u = -4$ kann aus Symmetriegründen ignoriert werden.

Aufstellen der Tangentengleichung im Punkt $B(4|f(4))$:

$$\begin{aligned}
 y &= f'(4) \cdot (x - 4) + f(4) \\
 \text{Mit } f(4) &= -0,625 \text{ und } f'(4) = 0,40625 \text{ gilt: } y = 0,40625(x - 4) - 0,625 \\
 \text{Gleichung der Tangente: } y &= 0,40625x - 2,25
 \end{aligned}$$

Gesucht ist nun die Schnittstelle der Tangente mit der waagrechten Geraden $y = 1,5$:

$$1,5 = 0,40625x - 2,25 \Leftrightarrow x \approx 9,23$$

Da der Kanalrand sich bei $x = 6$ befindet, beträgt die Entfernung der Person zum Kanalrand $9,23 \text{ m} - 6 \text{ m} = 3,23 \text{ Meter}$.

Aufgabe 2: (abgewandelte Abituraufgabe 2004)

a) *Bestimme die Periodendauer.*

Die Periodendauer beträgt $T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \approx 0,52$ Sekunden.

b) *Zwischen welchen Werten schwankt die Geschwindigkeit des Schwimmers?*

Die Funktion $f(t) = 0,4 \cdot \sin(t)$ besitzt die Wertemenge $[-0,4 ; 0,4]$.

Durch die Verschiebung um 1,5 nach oben besitzt die Funktion v die Wertemenge $[1,1 ; 1,9]$.

Die Geschwindigkeit schwankt zwischen 1,1 m/s und 1,9 m/s.

c) *Gib zwei Zeitpunkte an, in dem die Geschwindigkeit am stärksten abnimmt.*

Die Geschwindigkeit des Schwimmers nimmt am stärksten an den Stellen ab, an denen die Tangentensteigung minimal ist.

Diese Stellen existieren bei den Wendepunkten mit negativer Steigung.

Anhand des Schaubildes ist zu erkennen, dass der Wendepunkt mit negativer Steigung nach einer halben Periodendauer auftritt, also bei $t = \frac{\pi}{12}$ Sekunden.

Der nächste Zeitpunkt kommt eine Periodendauer später, also bei

$$t = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} \text{ Sekunden.}$$

d) *Welchen Weg legt der Schwimmer innerhalb von 50 Perioden zurück?*

Da es sich bei der Funktion v um eine Geschwindigkeitsfunktion handelt, wird der Weg des Schwimmers über ein Integral berechnet.

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\frac{50\pi}{6}} v(t) dt = \int_0^{\frac{25}{3}\pi} (0,4 \cdot \sin(12t) + 1,5) dt = \left[-\frac{0,4}{12} \cos(12t) + 1,5t \right]_0^{\frac{25}{3}\pi} \\ &= -\frac{0,4}{12} \cdot \cos(100\pi) + 12,5\pi - \left(-\frac{0,4}{12} \cdot \cos(0) \right) = 12,5\pi \approx 39,3 \text{ Meter.} \end{aligned}$$

Aufgabe 3: (abgewandelte Abituraufgabe 2005)

a) *Bestimme a und b anhand der Werte der ersten und fünften Woche.*

$$\text{Bedingung: } f(1) = 26: \quad a + \frac{b}{17} = 26 \quad \Leftrightarrow 17a + b = 442 \quad (1)$$

$$f(5) = 86: \quad a + \frac{b}{25} = 86 \quad \Leftrightarrow 25a + b = 2150 \quad (2)$$

$$\text{Gleichung (2) - (1): } 8a = 1708 \Leftrightarrow a = 213,5$$

$$\text{Einsetzen von } a = 213,5 \text{ in (1): } 17 \cdot 213,5 + b = 442 \Leftrightarrow b = -3187,5$$

$$\text{Funktionsgleichung: } f(x) = 213,5 - \frac{3187,5}{2x + 15}$$

Zeige rechnerisch, dass die Verkaufszahlen bei Supermarkt A ständig wachsen.

Zu zeigen ist, dass die Funktion $f(x)$ streng monoton wächst.

$$f(x) = 213,5 - 3187,5 \cdot (2x + 15)^{-1}$$

$$f'(x) = 3187,5 \cdot (2x + 15)^{-2} \cdot 2 = \frac{6375}{(2x + 15)^2} > 0 \text{ für } x \geq 0$$

Damit ist die Funktion streng monoton wachsend.

b) *Berechne näherungsweise, wie viele Tuben Zahnpasta der Supermarkt A in den ersten 52 Wochen insgesamt verkauft werden.*

$$\begin{aligned} \int_0^{52} f(x) dx &= \left[213,5x - 3187,5 \cdot \ln(|2x + 15|) \cdot \frac{1}{2} \right]_0^{52} \\ &= 11102 - 3187,5 \cdot \ln(119) \cdot \frac{1}{2} - \left(0 - 3187,5 \cdot \ln(15) \cdot \frac{1}{2} \right) \approx 7801 \end{aligned}$$

Es wurden ca. 7801 Tuben verkauft.

c) *Mit welchen wöchentlichen Verkaufszahlen kann der Supermarkt B langfristig rechnen?*

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $g(x) \rightarrow 214$.

Die waagrechte Asymptote der Funktion g ist $y = 214$.

Somit kann der Supermarkt B langfristig mit 214 verkauften Tuben pro Woche rechnen.

- d) *Wie kann man anhand der Schaubilder anschaulich ermitteln, nach wie vielen Wochen der Supermarkt A den größten Vorsprung gegenüber Supermarkt B an insgesamt verkauften Tuben hat?*

Der Vorsprung des Supermarktes A wächst, so lange das Schaubild von $f(x)$ oberhalb des Schaubildes von $g(x)$ liegt.

Die Schnittstelle der beiden Funktionen stellt die Woche dar, bei der der größte Vorsprung von A gegenüber B erreicht ist.

Gegeben ist die Gleichung $\int_0^u g(x)dx = \int_0^u f(x)dx$.

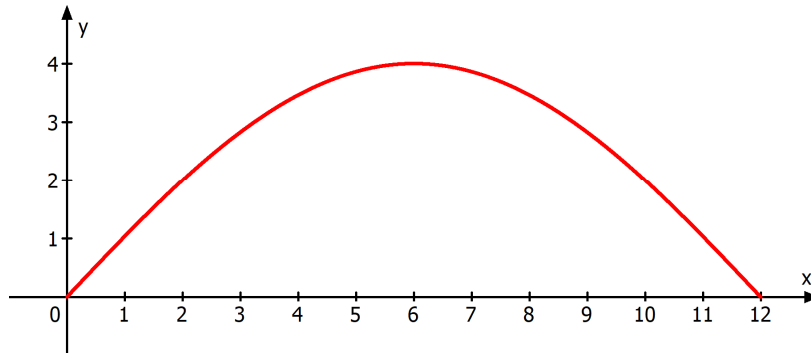
Welche Fragestellung wird mit der Gleichung beantwortet?

Die Integrale stellen die Anzahl der insgesamt verkauften Tuben in den ersten u Wochen von Supermarkt A bzw. Supermarkt B dar.

Da die Integrale gleichgesetzt wurden, wird damit folgende Frage beantwortet:
„Berechne die Woche u , bis zu der die Supermärkte A und B insgesamt gleich viele Tuben verkauft haben.“

Aufgabe 4: (abgewandelte Abituraufgabe 2006)**Teil 1:**

a) Skizziere K im angegebenen Intervall.



Gib die Anzahl der gemeinsamen Punkte von K mit der Geraden $y = mx$ in Abhängigkeit von m an.

Die Gerade $y = mx$ enthält immer den Ursprung $O(0|0)$, also gibt es immer mindestens einen gemeinsamen Punkt mit K .

Es gibt einen weiteren gemeinsamen Punkt, wenn die Steigung der Geraden $m \geq 0$ ist, aber kleiner als die Steigung der Tangente im Ursprung.

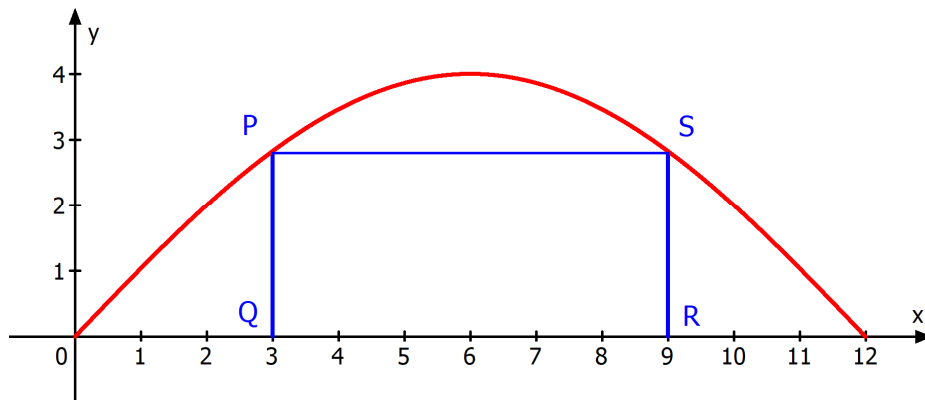
$$f'(x) = 4 \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)$$

$$\text{Es gilt } f'(0) = \frac{\pi}{3}$$

Es existieren zwei gemeinsame Punkte, wenn $0 \leq m < \frac{\pi}{3}$

Es existiert ein gemeinsamer Punkt für $m < 0$ oder $m \geq \frac{\pi}{3}$.

b) Stelle die zugehörige Zielfunktion auf.



Flächeninhalt des Rechtecks: $A = \overline{QR} \cdot \overline{RS}$

Zur Ermittlung des flächengrößten Rechtecks müssen die Koordinaten der Eckpunkte des Rechtecks festgelegt werden.

$P(6-u|f(6-u))$, $Q(6-u|0)$, $R(6+u|0)$, $S(6+u|f(6+u))$

Die Zielfunktion wird nun mit Hilfe der Flächeninhaltsfunktion des Rechtecks aufgestellt:

Es gilt $\overline{QR} = 6 + u - (6 - u) = 2u$ und $\overline{RS} = f(6 + u)$

Zielfunktion: $A(u) = 2u \cdot f(6 + u)$ mit $0 \leq u \leq 6$

Teil 2:

a) Wie wirkt sich eine Veränderung des Parameters a auf das Schaubild von f_a aus?

Mit wachsendem Parameter a sinkt die Amplitude und mit sinkendem Parameter a wird die Amplitude größer.

Die Periode des Schaubildes ist $p = \frac{2\pi}{a}$.

Mit wachsendem Parameter a wird die Periode kleiner und mit sinkendem Parameter a wird die Periode größer.

Berechne den Inhalt der Fläche, die das Schaubild von f_a mit der x-Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen einschließt.

$$\text{Nullstellen von } f_a: \frac{1}{a} \cdot \sin(ax) = 0$$

$$1 \text{ Nullstelle: } ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Eine Nullstelle: } ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Benachbarte Nullstelle: } ax = \pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{a}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{a}} f_a(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{a}} \left(\frac{1}{a} \sin(ax) \right) dx = \left[-\frac{1}{a^2} \cos(ax) \right]_0^{\frac{\pi}{a}} = -\frac{1}{a^2} \cos(\pi) - \left(-\frac{1}{a^2} \cos(0) \right) = \frac{2}{a^2}$$

- b) Stelle eine Gleichung in Abhängigkeit von z auf, mit der der Punkt P berechnet werden kann.

Für die gesamte Fläche zwischen dem Schaubild von $f_{0,5}$ und der x-Achse gilt:

$$\int_0^{2\pi} 2 \sin(0,5x) dx = \left[-4 \cos(0,5x) \right]_0^{2\pi} = -4 \cos(\pi) + 4(\cos(0)) = 4 + 4 = 8 \text{ FE}$$

Die Gerade parallel zur x-Achse geht durch den Punkt $P(z | f_{0,5}(z))$, die Gerade besitzt somit die Gleichung $y = f_{0,5}(z)$.

$$\text{Bedingung: } \int_z^{2\pi-z} (2 \sin(0,5x) - f_{0,5}(z)) dx = 4$$

$$\int_z^{2\pi-z} (2 \sin(0,5x) - f_{0,5}(z)) dx = \left[-4 \cos(0,5x) - f_{0,5}(z) \cdot x \right]_z^{2\pi-z}$$

$$= -4 \cos(\pi - 0,5z) - 2 \sin(0,5z) \cdot (2\pi - z) + 4 \cos(0,5z) + 2 \sin(0,5z) \cdot z$$

Die gesuchte Gleichung lautet:

$$-4 \cos(\pi - 0,5z) - 2 \sin(0,5z) \cdot (2\pi - z) + 4 \cos(0,5z) + 2 \sin(0,5z) \cdot z = 4$$

Aufgabe 5: (abgewandelte Abituraufgabe 2006)

- a) *Nach welcher Zeit erreicht die Konzentration ihren höchsten Wert?
Wie groß ist dieser höchste Wert?*

Aus dem Schaubild kann abgelesen werden, dass die Konzentration nach $t = 2$ Stunden am größten ist.

Der höchste Wert der Konzentration beträgt $f(2) = 20 \cdot 2 \cdot e^{-1} \approx 14,7$ mg/Liter

Weise rechnerisch nach, dass die Konzentration nach dem Erreichen des höchsten Werts ständig abnimmt.

Es ist zu zeigen, dass die Funktion für $t > 2$ streng monoton fallend ist.

$$f'(t) = 20 \cdot e^{-0,5t} + 20t \cdot e^{-0,5t} \cdot (-0,5) = 20e^{-0,5t} - 10t \cdot e^{-0,5t} = 10e^{-0,5t} \cdot (2 - t)$$

Für $t > 2$ ist $(2 - t) < 0$ und $10e^{-0,5t} > 0$

Damit ist $f'(t) < 0$ für $t > 2$. Die Funktion ist für $t > 2$ streng monoton fallend.

Gegeben ist die Gleichung $f(u) - f(u + 2) = 5$.

Wie lautet die Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf diese Gleichung führt?

$f(u)$ = Konzentration des Medikaments zum Zeitpunkt u

$f(u+2)$ = Konzentration des Medikaments zum Zeitpunkt $u + 2$

$f(u) - f(u+2)$ gibt an, um wie viel sich die Konzentration im Zeitintervall $[u ; u+2]$ ändert.

Fragestellung: Bestimme ein 2-Stundenintervall, in welchem die Konzentration des Medikaments um 5 mg/Liter sinkt.

- b) *Bestimme rechnerisch die Wendestelle und interpretiere die Bedeutung der Wendestelle im Sachzusammenhang.*

Notwendige Bedingung für die Wendestelle: $f''(t) = 0$

$$f''(t) = 10e^{-0,5t} \cdot (-0,5) \cdot (2 - t) + 10e^{-0,5t} \cdot (-1)$$

$$f''(t) = -5e^{-0,5t} \cdot (2 - t) - 10e^{-0,5t} = -5e^{-0,5t}(2 - t + 2) = -5e^{-0,5t}(4 - t)$$

$$-5e^{-0,5t}(4 - t) = 0 \quad \text{Lösung mit Satz vom Nullprodukt}$$

I): $-5e^{-0,5t} = 0$ ist nicht lösbar

II): $4 - t = 0 \Rightarrow t = 4$

Die Wendestelle ist $t = 4$.

Da in der Aufgabenstellung bereits vorgegeben ist, dass das Schaubild von f eine Wendestelle besitzt, ist die Prüfung der hinreichenden Bedingung nicht erforderlich.

Bedeutung der Wendestelle:

Zum Zeitpunkt $t = 4$ Stunden nimmt die Konzentration des Medikaments am stärksten ab.

Wie groß ist die momentane Änderungsrate der Konzentration an der Stelle $t = 4$?

$$f'(4) = 10e^{-2} \cdot (2 - 4) = -20e^{-2} \approx -2,7 \text{ mg/Liter pro Stunde}$$

Bestimme damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut ist.

Ansatz Tangentengleichung bei $t = 4$: $y = f'(4) \cdot (t - 4) + f(4)$

$$\text{Es gilt } f(4) = 80e^{-2} \approx 10,8$$

$$\text{Tangentengleichung: } y = -2,7 \cdot (t - 4) + 10,8 \Rightarrow y = -2,7t + 21,6$$

Das Medikament ist vollständig abgebaut, sobald die Tangente die t -Achse schneidet: $y = 0 \Leftrightarrow -2,7t + 21,6 = 0 \Leftrightarrow t = 8$

Nach 8 Stunden ist das Medikament vollständig abgebaut.

- c) *Gib die Gleichung der Funktion $g(t)$ für $t \geq 4$ an, die die Konzentration des Medikaments zum Zeitpunkt t beschreibt.*

Nach 4 Stunden erfolgt eine weitere Einnahme des Medikaments. Hierdurch ergibt sich eine Überlagerung zweier Funktionen.

Für $t \geq 4$ wird die Gesamtkonzentration beschrieben durch $g(t) = f(t) + f(t - 4)$.

(Hinweis: $f(t-4)$ ist eine Verschiebung der Ausgangsfunktion um 4 nach rechts und gibt im Verlauf die Medikamentenkonzentration der zweiten Einnahme an.

$$g(t) = 20t \cdot e^{-0,5t} + 20(t - 4)e^{-0,5(t-4)}$$

- d) Bestimme die Konstanten a und b , wenn die Konzentration vier Stunden nach der Einnahme ihren größten Wert $10 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$ erreicht.

$$g(t) = at \cdot e^{-bt}$$

$$g'(t) = a \cdot e^{-bt} + at \cdot e^{-bt} \cdot (-b) = a \cdot e^{-bt} \cdot (1 - bt)$$

Bedingung: $g(4) = 10$ und $g'(4) = 0$ (lokales Maximum mit Steigung 0)

$$g(4) = 4a \cdot e^{-4b} = 10 \quad (1)$$

$$g'(4) = ae^{-4b}(1 - 4b) = 0 \quad (2)$$

Aus (2) folgt $b = 0,25$ (Satz vom Nullprodukt)

Aus (1) ergibt sich: $4a \cdot e^{-1} = 10 \Rightarrow a = 2,5e$

Aufgabe 6: (abgewandelte Abituraufgabe 2007)

a) Bestimme a und b .

$$\text{Es gilt } f(5) = 95 \Rightarrow a + \frac{b}{10} = 95 \Rightarrow 10a + b = 950 \quad (1)$$

$$\text{Es gilt } f(20) = 56 \Rightarrow a + \frac{b}{25} = 56 \Rightarrow 25a + b = 1400 \quad (2)$$

Gleichung (2) – (1): $15a = 450 \Leftrightarrow a = 30$
Daraus folgt $b = 650$.

$$\text{Gleichung der Funktion: } f(x) = 30 + \frac{650}{x+5}.$$

Weise nach, dass die Herstellungskosten für eine Produktionseinheit im Laufe der Zeit sinken.

Die sinkenden Herstellungskosten können mit der strengen Monotonie von f nachgewiesen werden.

$$\text{Umschreiben der Funktion: } f(x) = 30 + 650 \cdot (x+5)^{-1}$$

Ableitung mit der Kettenregel:

$$f'(x) = -650 \cdot (x+5)^{-2} = \frac{-650}{(x+5)^2}$$

Da $f'(x) = \frac{-650}{(x+5)^2} < 0$ für $x \geq 0$ gilt, ist nachgewiesen, dass die Funktion f streng monoton fällt.

Ab der wievielten Produktionseinheit sind die Herstellungskosten für eine Produktionseinheit geringer als 400.000 Euro?

Die Produktionseinheit, ab der die Herstellungskosten < 400.000 Euro sind, ergeben sich aus der Bedingungsungleichung $f(x) < 40$.

$$\begin{aligned} 30 + \frac{650}{x+5} &< 40 \quad | \cdot (x+5) \\ \Leftrightarrow 30 \cdot (x+5) + 650 &< 40 \cdot (x+5) \\ \Leftrightarrow 30x + 800 &< 40x + 200 \\ \Leftrightarrow 600 &< 10x \\ \Leftrightarrow x &> 60 \end{aligned}$$

Ab der 61. Produktionseinheit die Herstellungskosten unter 400.000 Euro.

Mit welchen Herstellungskosten für eine Produktionseinheit muss man langfristig rechnen?

Langfristige Herstellungskosten ergeben sich aus $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 30$.

Man muss langfristig mit 300.000 Euro Herstellungskosten für eine Produktionseinheit rechnen.

- b) *Ab der wievielten Produktionseinheit unterscheiden sich die Herstellungskosten von zwei aufeinander folgenden Produktionseinheiten um 10.000 Euro?*

Die beiden gesuchten Produktionseinheiten seien x und $x+1$.
Aus der Bedingung ergibt sich $f(x) - f(x+1) = 1$.

$$f(x) - f(x+1) = 30 + \frac{650}{x+5} - \left(30 + \frac{650}{x+6} \right) = \frac{650}{x+5} - \frac{650}{x+6}$$

$$\text{Bedingung: } \frac{650}{x+5} - \frac{650}{x+6} = 1 \quad | \cdot (x+5) \cdot (x+6)$$

$$650 \cdot (x+6) - 650 \cdot (x+5) = (x+5) \cdot (x+6)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 11x - 620 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 2480}}{2} = \frac{-11 \pm 51}{2} \Rightarrow x_1 = 20 \quad x_2 = -31$$

Da negative Lösungen nicht zulässig sind, ist $x = 20$ die gesuchte Lösung.

Von der 20. auf die 21. Produktionseinheit fallen die Herstellungskosten genau um 10.000 Euro.

Wie hoch muss der Verkaufspreis für eine Packung sein, damit die Einnahmen aus den ersten 100 verkauften Produktionseinheiten ihren Herstellungskosten entsprechen?

Herstellungskosten der ersten 100 Produktionseinheiten:

$$\int_0^{100} f(x) dx = \int_0^{100} \left(30 + \frac{650}{x+5} \right) dx = \left[30x + 650 \cdot \ln|x+5| \right]_0^{100} \approx 3000 + 3025,07 - 1046,13 \\ \approx 4979$$

Die Herstellungskosten der ersten 100 Produktionseinheiten insgesamt näherungsweise $4979 \cdot 10.000 = 49.790.000$ Euro.

Die ersten 100 Produktionseinheiten umfassen 1.000.000 Packungen.

Somit muss der Verkaufspreis $\frac{49.790.000}{1.000.000} = 49,79$ Euro pro Packung betragen.

Aufgabe 7: (abgewandelte Abituraufgabe 2007)

a) Um welche Uhrzeit ist die momentane Ankunftsrate maximal?

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und VZW von f' von + nach –

$$f(x) = 0,27 \cdot x^2 \cdot e^{-0,12x}$$

$$f'(x) = 0,54x \cdot e^{-0,12x} + 0,27x^2 \cdot e^{-0,12x} \cdot (-0,12) = x \cdot e^{-0,12x} \cdot (0,54 - 0,0324x)$$

$$x \cdot e^{-0,12x} \cdot (0,54 - 0,0324x) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

I) $x = 0$ (laut Schaubild liegt dort kein Maximum vor)

$$\text{II) } 0,54 - 0,0324x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{50}{3} \approx 16,67$$

VZW-Kontrolle bei $x \approx 16,67$: $f'(16) > 0$ und $f'(17) < 0$

Damit existiert bei der Funktion f' ein VZW von + nach – und es liegt ein lokales Maximum vor. Laut Schaubild ist dies auch gleichzeitig das globale Maximum.

Nach $16\frac{2}{3}$ min, also um 19.16 Uhr und 40 Sekunden ist die höchste Ankunftsrate.

Wie groß ist die maximale Ankunftsrate?

Es gilt $f(16,67) \approx 10,15$

Die maximale Ankunftsrate beträgt 10,15 Personen pro Minute.

b) Zeige, dass die Anzahl der insgesamt ankommenden Personen durch die Funktion g beschrieben wird.

Da die Funktion f eine Ankunftsrate (Einheit: Personen pro Minute) darstellt liefert

die Integralfunktion $J_0(x) = \int_0^x f(t) dt$ die Anzahl der insgesamt ankommenden

Personen im Zeitintervall $[0 ; x]$.

Hierzu wird nun der Nachweis geführt, dass die Funktion g der Integralfunktion entspricht.

Dazu wird der Nachweis $g'(x) = f(x)$ geführt.

$$\begin{aligned} g'(x) &= -(4,5x + 37,5) \cdot e^{-0,12x} - (2,25x^2 + 37,5x + 312,5) \cdot e^{-0,12x} \cdot (-0,12) \\ &= e^{-0,12x} (-4,5x - 37,5 + 0,27x^2 + 4,5x + 37,5) = 0,27x^2 \cdot e^{-0,12x} \end{aligned}$$

Damit ist g eine Stammfunktion von f .

Da $J_0(0) = 0$ ist, muss noch gezeigt werden, dass $g(0) = 0$ ist.

Da $g(0) = 312,5 - 312,5 \cdot e^0 = 0$ gilt, ist gezeigt, dass $g(x)$ die Anzahl der insgesamt ankommenden Personen seit 19.00 Uhr beschreibt.

Gib die waagrechte Asymptote der Funktion g an und interpretiere das Ergebnis im Sachzusammenhang.

$$g(x) = 312,5 - (2,25x^2 + 37,5x + 312,5) \cdot e^{-0,12x}$$

Für $x \rightarrow +\infty$ gilt $g(x) \rightarrow 312,5$, da $(2,25x^2 + 37,5x + 312,5) \cdot e^{-0,12x} \rightarrow 0$ strebt.

Die Gleichung der waagrechten Asymptote lautet $y = 312,5$.

Interpretation: Es kommen ca. 312 Personen ins Kino.

- c) *Mit welcher Wartezeit muss eine Person rechnen, die um 19.20 Uhr zum Kino kommt?*

Um 19.20 Uhr warten bereits $g(20) \approx 134$ Personen am Kartenschalter.

Eine Person, die um 19.20 Uhr kommt, muss mit einer Wartezeit von ca.

$$\frac{134}{6} \approx 22,3 \text{ Minuten rechnen.}$$

Gib die Gleichung einer Funktion $w(x)$ mit $x \geq 20$ an, die die Anzahl der Personen in der Warteschlange x Minuten nach 19 Uhr beschreibt.

Die Anzahl der wartenden Personen zum Zeitpunkt x wird durch die Funktion $w(x) = g(x) - 6 \cdot (x - 20)$ für $x \geq 20$ dargestellt.

- d) *Wie viele Personen müssen jetzt mindestens pro Minute am Schalter abgefertigt werden, damit die Warteschlange um 20.30 Uhr abgebaut ist?*

Die Variable x sei die Zeit in Minuten ab 19.00 Uhr

Die Anzahl der wartenden Personen zum Zeitpunkt x wird durch die Funktion $w(x) = g(x) - a \cdot (x - 50)$ für $x \geq 50$ dargestellt, wobei a die gesuchte Anzahl der Personen ist, die pro Minute abgefertigt werden müssen.

Da um 20.30 Uhr die Schlange aufgelöst sein soll, muss gelten:

$$w(90) = 0$$

$$\Leftrightarrow g(90) - a \cdot 40 = 0 \Leftrightarrow 312,05 - 40a = 0 \Leftrightarrow a \approx 7,8$$

$$w(90) = 0 \Rightarrow g(90) - a \cdot 40 = 0 \Rightarrow 312,05 - 40a = 0 \Rightarrow a = 7,8 \text{ Personen.}$$

Ab 19.50 Uhr müssten pro Minute mindestens 7,8 Personen abgefertigt werden.

Aufgabe 8: (abgewandelte Abituraufgabe 2008)

- a) *Berechne die Stelle, an der die östliche Talseite am steilsten ist, und dann die Stelle, an der die westliche Talseite gleich steil ist.*

Die östliche Talseite ist an der Wendestelle am steilsten.

Berechnung der Wendestelle von f:

$$f(x) = -0,125x^3 + 0,75x^2 - 3,125$$

$$f'(x) = -0,375x^2 + 1,5x$$

$$f''(x) = -0,75x + 1,5$$

$$f'''(x) = -0,75$$

Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$-0,75x + 1,5 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f'''(2) = -0,75 \neq 0$$

An der Stelle $x = 2$ ist die östliche Talseite am steilsten.

Die Steigung beträgt $f'(2) = 1,5$

Nun ist die Stelle an der westlichen Talseite gesucht, die „gleich steil“ ist.

Damit ist gemeint, dass die Steigung entweder $m = 1,5$ oder $m = -1,5$ sein muss.

Man erkennt anhand des Schaubildes, dass die Tangentensteigungen an der westlichen Talseite negativ sind.

Daher gilt die Bedingung: $f'(x) = -1,5$

$$-0,375x^2 + 1,5x = -1,5$$

$$-0,375x^2 + 1,5x + 1,5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1,5 \pm \sqrt{2,25 + 2,25}}{-0,75} = \frac{-1,5 \pm \sqrt{4,5}}{-0,75}$$

Daraus folgt $x_1 \approx -0,828$ und $x_2 \approx 4,828$.

Da x_2 sich nicht auf der westlichen Seite befindet, ist die gesuchte Stelle

$x_1 \approx -0,828$.

Gib die Breite der Staumauer an ihrer Oberkante an.

Zunächst benötigt man den tiefsten Punkt des Tals.

Hinreichende Bedingung des Tiefpunktes: $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$

$$-0,375x^2 + 1,5x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (-0,375x + 1,5) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

$$\text{I) } x = 0$$

$$\text{II) } -0,375x + 1,5 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

$$f''(0) = 1,5 > 0 \Rightarrow T(0 | f(0)) \text{ also Tiefpunkt } T(0 | -3,125)$$

$$f''(4) = -1,5 < 0 \Rightarrow H(4 | f(4)) \text{ also Hochpunkt } H(4|0,875)$$

Addiert man zum y-Wert des Tiefpunktes nun 312,5 Meter, befindet sich die Oberkante der Staumauer auf der Höhe $y = 0$ (die Oberkante entspricht anschaulich der x-Achse).

Die Breite der Staumauer entspricht dem Abstand der Nullstellen des Schaubilds von f .

Diese sind aufgrund der Vorgaben $x_1 \approx -1,8$ und $x_2 \approx 2,8$

Der Abstand zwischen den beiden Nullstellen beträgt $d = 4,6$ und damit ist die Breite der Staumauer an ihrer Oberkante 460 Meter.

Bestimme den Inhalt dieser Fläche.

$$\int_{-1,8}^{2,8} f(x) dx = \left[-\frac{1}{32}x^4 + 0,25x^3 - 3,125x \right]_{-1,8}^{2,8} = -5,1828 - 3,83895 = -9,02175$$

Die Fläche beträgt $A \approx 9,02 = 9,02 \cdot 10000 \text{m}^2 = 90200 \text{m}^2$

- b) *Bestimme die Mindesthöhe dieses Gerüstes, bei der das Sonnenlicht den tiefsten Punkt des Geländequerschnitts erreichen kann.*

Das Gerüst befindet sich an der höchsten Stelle östlich des Dorfes, also im Punkt Hochpunkt $H(4|0,875)$ (siehe Teilaufgabe a)).

Um die Höhe des Gerüstes zu ermitteln, wird vom Tiefpunkt $T(0|-3,125)$ eine Tangente an das Schaubild von f gelegt.

Allgemeine Tangentengleichung: $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

$$y = (-0,375u^2 + 1,5u) \cdot (x - u) - 0,125u^3 + 0,75u^2 - 3,125$$

Einsetzen des bekannten Tangentenpunkt $T(0|-3,125)$:

$$-3,125 = (-0,375u^2 + 1,5u) \cdot (-u) - 0,125u^3 + 0,75u^2 - 3,125$$

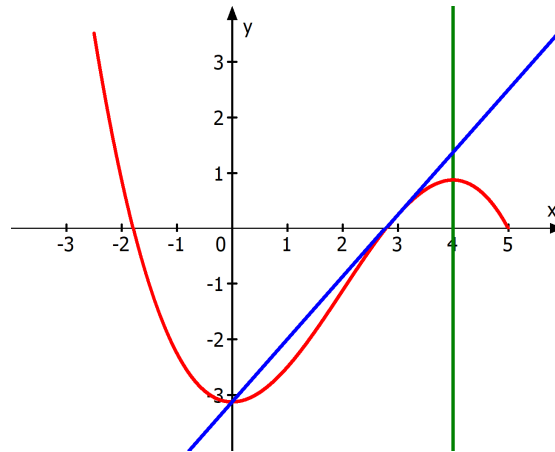
$$\Leftrightarrow -0,25u^3 + 0,75u^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0,25u^2(-u + 3) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

$$\text{I) } u = 0$$

$$\text{II) } u = 3$$

Der gesuchte Berührungspunkt ist $B(3|f(3))$, also $B(3|0,25)$



Die Tangentengleichung lautet $y = f'(3) \cdot (x - 3) + f(3)$
 $y = 1,125 \cdot (x - 3) + 0,25 \Rightarrow y = 1,125x - 3,125$

Einsetzen von $x = 4$ in die Tangente ergibt $y = 1,375$.

Höhe des Gerüsts: $h = 1,375 - (y\text{-Wert von } H) = 1,375 - 0,875 = 0,5$.

Die Mindesthöhe des Gerüsts beträgt 50 Meter.

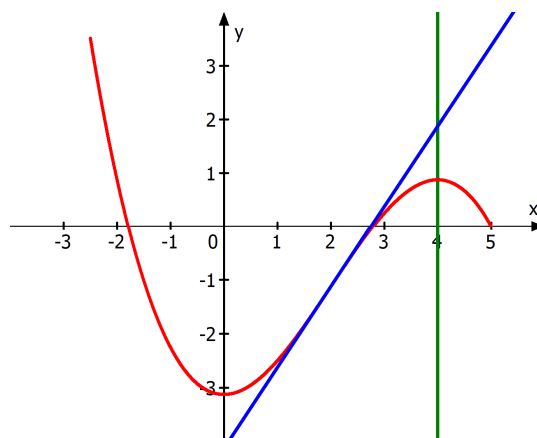
Wie hoch müsste das Gerüst werden, damit der gesamte Geländequerschnitt zwischen Dorf und Gerüst beleuchtet werden kann?

Damit der gesamte Geländequerschnitt zwischen Dorf und Gerüst beleuchtet werden kann, muss die Tangente an der Wendestelle (die Stelle mit der größten Steigung) ermittelt werden.

Aus a) ergibt sich als Wendestelle $x = 2$.

Die Tangentengleichung lautet $y = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2)$

$$y = 1,5 \cdot (x - 2) - 1,125 \Rightarrow y = 1,5x - 4,125$$



Einsetzen von $x = 4$ in die Tangente ergibt $y = 1,875$

Höhe des Gerüsts: $h = 1,875 - (y\text{-Wert von } H) = 1,875 - 0,875 = 1$.

Die Mindesthöhe des Gerüsts beträgt 100 Meter.

Aufgabe 9: (abgewandelte Abituraufgabe 2008)

a) *Gib an, zu welchen Uhrzeiten die Außentemperatur minimal bzw. maximal ist.*

Das Schaubild von f besitzt die Periode $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24$ Stunden.

Da das Schaubild von f gegenüber der Grundsinusfunktion um 8,5 nach rechts verschoben ist, befindet sich die Wendestelle bei $x = 8,5$.

Die minimale Außentemperatur existiert bei $x = 8,5 - \frac{p}{4} = 2,5$ Stunden

(also um 2.30 Uhr).

Die maximale Außentemperatur existiert bei $x = 8,5 + \frac{p}{4} = 14,5$ Stunden

(also um 14.30 Uhr).

Wann ist der Temperaturanstieg im Freien am größten?

Der Temperaturanstieg ist an der Wendestelle am größten, also bei $x = 8,5$ (um 8.30 Uhr).

Bestimme die durchschnittliche Temperatur im Freien zwischen 6 und 18 Uhr.

$$\frac{1}{18-6} \cdot \int_6^{18} f(x) dx = \frac{1}{12} \cdot \left[-8 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}(x-8,5)\right) \cdot \frac{12}{\pi} + 21x \right]_6^{18} = \frac{1}{12} \cdot (402,2 - 101,8) \approx 25$$

Die durchschnittliche Temperatur beträgt 25°C.

b) *Bestimme einen Term der Funktion g , der den Temperaturverlauf K_g wiedergibt.*

Die Funktion g hat die Bauart $g(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$.

Es gilt $d = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = \frac{21 + 15}{2} = 18$. Die Amplitude beträgt $a = 3$.

Periode $p = 24$ und damit $24 = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = \frac{\pi}{12}$

Die Wendestelle mit positiver Steigung befindet sich bei $x = 12$.
Somit gilt $c = 12$.

$$g(x) = 3 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x - 12)\right] + 18$$

Beschreibe, wie K_g aus dem Schaubild der Sinusfunktion mit $y = \sin(x)$ entsteht.

Das Schaubild von g entsteht aus der Sinusfunktion durch folgende Schritte:

- 1.) Streckung mit dem Faktor $a = 3$ in y-Richtung
- 2.) Verschiebung um 18 nach oben
- 3.) Streckung mit dem Faktor $\frac{12}{\pi}$ in x-Richtung.
- 4.) Verschiebung um 12 nach rechts

Gib eine mögliche Ursache für die zeitliche Verschiebung der beiden Temperaturverläufe K_f und K_g an.

Die Ursache für die zeitliche Verschiebung liegt darin begründet, dass eine Temperaturänderung im Freien sich erst zeitversetzt im Haus bemerkbar macht (aufgrund der Dämmung etc.).

c) *Berechne a und b .*

Es gilt:

$$h(24) = f(24) \Rightarrow 10 \cdot \sin\left(\frac{31}{24}\pi\right) + 24a + b = 8 \cdot \sin\left(\frac{31}{24}\pi\right) + 21 \Rightarrow 24a + b = 22,587$$

$$h'(24) = f'(24) \Rightarrow 10 \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \cos\left[\frac{\pi}{12}(24 - 8,5)\right] + a = 8 \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \cos\left[\frac{\pi}{12}(24 - 8,5)\right] \\ \Rightarrow -0,32 + a = 0$$

Daraus ergibt sich $a = 0,32$ und $b = 14,9$.

Begründe, warum die durchschnittliche Außentemperatur am zweiten Tag nur durch den Term $ax+b$ bestimmt wird.

Die durchschnittliche Außentemperatur am zweiten Tag beträgt:

$$D = \frac{1}{48 - 24} \cdot \int_{24}^{48} (10 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x - 8,5)\right] + ax + b) dx$$

Für den „Sinusteil“ der Funktion h gilt: $\int_{24}^{48} 10 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x - 8,5)\right] dx = 0$.

Begründung: Die Sinusfunktion besitzt die Periode 24 und deren Schaubild hat als Mittelachse die x-Achse. Daher heben sich die Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse gegenseitig auf.

Somit wird die durchschnittliche Temperatur nur durch den Term $ax + b$ bestimmt.

Aufgabe 10: (abgewandelte Abituraufgabe 2010)

a) Berechne die höchste Geschwindigkeit des Motorbootes.

$$v(t) = 960 \cdot e^{-t} - 960 \cdot e^{-2t}$$

$$v'(t) = -960e^{-t} + 1920e^{-2t}$$

$$v''(t) = 960e^{-t} - 3840e^{-2t}$$

$$v'''(t) = -960e^{-t} + 7680e^{-2t}$$

Hinreichende Bedingung für Hochpunkt: $v'(t) = 0$ und $v''(t) < 0$

$$-960e^{-t} + 1920e^{-2t} = 0$$

$$\Leftrightarrow 960e^{-t} \cdot (-1 + 2e^{-t}) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

I) $960e^{-t} = 0$ ist nicht lösbar

II) $-1 + 2e^{-t} = 0 \Leftrightarrow -t = \ln(0,5) \Leftrightarrow t \approx 0,693$

$$v''(0,693) < 0 \quad \text{also lokales Maximum bei } t = 0,693.$$

$$v(0,693) = 240$$

Die höchste Geschwindigkeit des Motorbootes beträgt 240 m/min.

Wann nimmt die Geschwindigkeit des Motorbootes am stärksten ab?

Die Geschwindigkeit nimmt am stärksten an der Wendestelle der Funktion v ab.

Hinreichende Bedingung für Wendestelle: $v''(t) = 0$ und $v'''(t) \neq 0$

$$960e^{-t} - 3840e^{-2t} = 0$$

$$\Leftrightarrow 960e^{-t} \cdot (-1 + 4e^{-t}) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

I) $960e^{-t} = 0$ ist nicht lösbar

II) $-1 + 4e^{-t} = 0 \Leftrightarrow -t = \ln(0,25) \Leftrightarrow t \approx 1,386$

$$v'''(1,386) \neq 0$$

Nach ca. 1,386 Minuten nimmt die Geschwindigkeit am stärksten ab.

Welche mittlere Geschwindigkeit hat das Motorboot in den ersten fünf Minuten?

$$\bar{v} = \frac{1}{5} \cdot \int_0^5 v(t) dt = \frac{1}{5} \cdot \left[-960e^{-t} + 480e^{-2t} \right]_0^5 = \frac{1}{5} \cdot (-6,468 + 0,022 - (-960 + 480))$$

$$\approx 94,7 \text{ m/min}$$

Wie lange fährt das Motorboot schneller als das Segelboot?

Berechnung der Zeitpunkte, wann beide Boote gleich schnell sind:

$$960 \cdot e^{-t} - 960 \cdot e^{-2t} = 160$$

$$6e^{-t} - 6e^{-2t} - 1 = 0 \quad \text{Lösung mit Substitution } u = e^{-t}$$

$$6u - 6u^2 - 1 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 24}}{-12} = \frac{-6 \pm \sqrt{12}}{-12} \quad u_1 \approx 0,211 \quad u_2 \approx 0,789$$

$$\text{Rücksubstitution: } e^{-t} = 0,211 \Rightarrow t \approx 1,56$$

$$e^{-t} = 0,789 \Rightarrow t \approx 0,24$$

Die Schaubilder schneiden sich bei $t = 0,24$ min und $t = 1,56$ min.

Innerhalb dieses Intervalls fährt das Motorboot schneller, da sich das Schaubild v in diesem Intervall oberhalb der waagrechten Geraden $y = 160$ befindet.

Das Motorboot fährt ca. $1,56 - 0,24 = 1,32$ min lang schneller als das Segelboot.

b) *Wie weit ist das Motorboot nach zwei Minuten gefahren?*

$$s = \int_0^2 v(t) dt = \left[-960e^{-t} + 480e^{-2t} \right]_0^2 = -129,9 + 8,79 - (-960 + 480) \approx 359 \text{ Meter}$$

Das Motorboot ist nach zwei Minuten ca. 359 Meter gefahren.

Bestimme einen Term der Funktion, die den vom Motorboot zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

Der zurückgelegte Weg s wird mit Hilfe einer Stammfunktion der Funktion v dargestellt.

$$\text{Allgemeine Stammfunktion: } s(t) = -960e^{-t} + 480 \cdot e^{-2t} + C$$

$$\text{Berechnung von } C \text{ mit der Bedingung } s(0) = 0: s(0) = -480 + C = 0 \Leftrightarrow C = 480$$

$$s(t) = -960e^{-t} + 480 \cdot e^{-2t} + 480$$

Legt das Motorboot nach diesem Modell mehr als 500 m zurück?

Die Funktion $s(t)$ ist streng monoton wachsend, da die Ableitungsfunktion $v(t)$ nur positive Werte annimmt.

Außerdem gilt: Für $t \rightarrow +\infty$ gilt $s(t) \rightarrow 480$.

Das heißt, dass die Funktion den Wert 480 nicht überschreiten kann.

Somit kann das Motorboot eine Strecke von mehr als 480 Meter nicht zurücklegen.

Weise rechnerisch nach, dass das Motorboot das Segelboot nach ca. $t = 0,58$ Minuten überholt.

Es ist zu zeigen, dass nach $t = 0,58$ Minuten das Motorboot und das Segelboot dieselbe Strecke zurückgelegt haben.

Strecke Motorboot: $s(0,58) = -960e^{-0,58} + 480e^{-1,16} + 480 \approx 93$ Meter

Strecke Segelboot: $160 \cdot \frac{\text{m}}{\text{min}} 0,58 \text{ min} \approx 93$ Meter

c) Wann kommt das Motorboot zum Stillstand?

Gleichung der Tangente an das Schaubild der Funktion v :

Allgemeine Tangentengleichung: $y = v'(u) \cdot (t - u) + v(u)$

Mit $v'(t) = -960e^{-t} + 1920e^{-2t}$ folgt $v'(2,55) \approx -63,3$

Außerdem gilt $v(2,55) \approx 69,1$

Tangentengleichung: $y = -63,3 \cdot (t - 2,55) + 69,1 \Rightarrow y = -63,3t + 230,5$

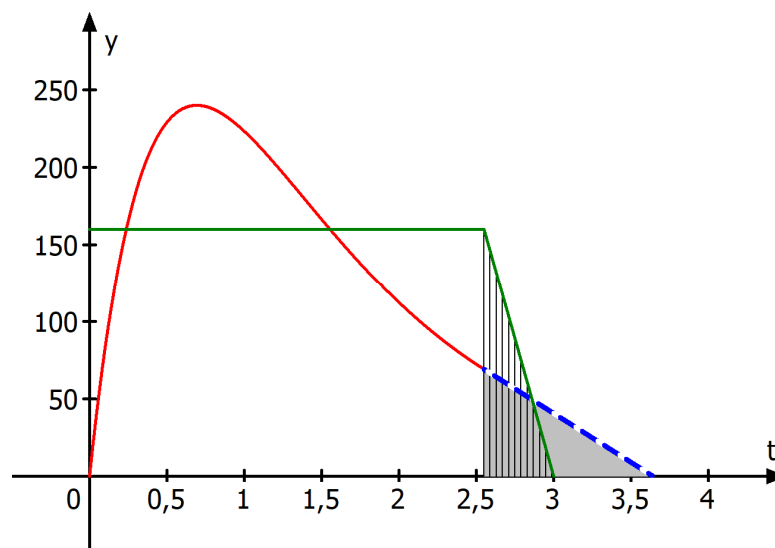
Das Motorboot kommt zum Stillstand, wenn die Tangente die t -Achse schneidet:

$0 = -63,3t + 230,5 \Leftrightarrow t \approx 3,64$ Minuten

Nach ca. 3,64 Minuten kommt das Motorboot zum Stillstand.

Wann kommt das Segelboot zum Stillstand?

Da das Segelboot am gleichen **Ort** wie das Motorboot zum Stillstand kommt, wird zunächst berechnet, welche Strecke das Motorboot ab dem Zeitpunkt $t = 2,55$ min bis zu seinem Stillstand zum Zeitpunkt $t = 3,64$ min zurücklegt.



Diese Strecke entspricht dem Inhalt des grauen Dreiecks, die die gestrichelte Tangente mit der t -Achse einschließt.

$$A_{\text{graues Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (3,64 - 2,55) \cdot 69,1 \approx 37,7 \text{ Meter.}$$

Die Strecke des Segelbootes entspricht dem Inhalt des gestrichelten Dreiecks, die die grüne Gerade mit der t-Achse einschließt.

Da die Strecken gleich sein sollen, müssen die Dreiecke den gleichen Inhalt besitzen.

$$\text{Es gilt } A_{\text{gestrichelt}} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot 160 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot 160 = 37,7 \Rightarrow g \approx 0,47.$$

Da die Grundseite des gestrichelten Dreiecks 0,47 lang ist, schneidet die grüne Gerade die t-Achse an der Stelle $t = 2,55 + 0,47 \approx 3$

Nach ca. 3 Minuten kommt das Segelboot zum Stillstand.

Aufgabe 11-1: (abgewandelte Abituraufgabe 2011)

a) In welchem Zeitraum ist die momentane Zuflussrate größer als $100 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$?

Zunächst werden die Zeitpunkte ermittelt, für die $w(t) = 100$ gilt:

$$50 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 60 = 100$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) = 0,8$$

$$\text{WTR: } \frac{\pi}{12} t \approx 0,927 \quad \Leftrightarrow t \approx 3,54 \text{ Stunden}$$

Eine weitere Lösung ergibt sich unter Berücksichtigung des gegebenen Schaubildes: $t \approx 12 - 3,54 = 8,46$ Stunden

Die Zuflussrate ist im Intervall $3,54 < t < 8,46$ größer als $100 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$

Zu welchem Zeitpunkt nimmt die momentane Zuflussrate am stärksten ab?

Der gesuchte Zeitpunkt befindet sich an der Wendestelle des Schaubildes mit negativer Steigung.

Da das Schaubild von w die Periode $p = 24$ besitzt und nicht nach links/rechts verschoben wurde, existiert die Wendestelle nach einer halben Periode bei $t = 12$ Stunden.

Nach 12 Stunden nimmt die momentane Zuflussrate am stärksten ab.

b) Wie viel Wasser enthält es nach 24 Stunden?

Zugeflossene Wassermenge innerhalb von 24 Stunden:

$$\int_0^{24} w(t) dt = \left[-50 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} t\right) \cdot \frac{12}{\pi} + 60t \right]_0^{24} = -50 \cdot \frac{12}{\pi} + 1440 + 50 \cdot \frac{12}{\pi} = 1440 \text{ m}^3$$

Nach 24 Stunden sind $5000 \text{ m}^3 + 1440 \text{ m}^3 = 6440 \text{ m}^3$ im Staubecken.

Bestimme einen integralfreien Funktionsterm für die zum Zeitpunkt t im Staubecken enthaltene Wassermenge.

$$V(t) = 5000 + \int_0^t \left(50 \sin\left(\frac{\pi}{12} z\right) + 60 \right) dz = 5000 + \left[-50 \cos\left(\frac{\pi}{12} z\right) \cdot \frac{12}{\pi} + 60z \right]_0^t$$

$$V(t) = 5000 - \frac{600}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{12} t\right) + 60t + \frac{600}{\pi}$$

Aufgabe 11-2: (abgewandelte Abituraufgabe 2011)

a) Bestimme die Koordinaten des Hochpunktes H_a von K_a für $0 \leq x \leq p_a$.

Die Funktion $y = \sin(x)$ besitzt den Hochpunkt $H(\frac{\pi}{2} | 1)$.

Das Schaubild K_a entsteht aus der Funktion $y = \sin(x)$ durch

- I) Streckung des Schaubildes in y-Richtung mit dem Faktor a
- II) Streckung des Schaubildes in x.-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{a}$
- III) Verschiebung des Schaubildes um a in y-Richtung.

Der Hochpunkt $H(\frac{\pi}{2} | 1)$ erfährt durch I) – III) folgende Änderungen:

$$\text{I) } H_1(\frac{\pi}{2} | a) \quad \text{II) } H_2(\frac{\pi}{2a} | a) \quad \text{III) } H_3 = H_a(\frac{\pi}{2a} | 2a)$$

Ermittle eine Gleichung der Kurve, auf der alle diese Hochpunkte H_a liegen.

Ortskurve von $H_a(\frac{\pi}{2a} | 2a)$

$$\text{Es gilt } x = \frac{\pi}{2a} \quad (1) \quad \text{und } y = 2a \quad (2)$$

$$\text{Aus (1) folgt } a = \frac{\pi}{2x}$$

$$\text{Einsetzen in (2): } y = 2 \cdot \frac{\pi}{2x} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{x}$$

b) Gib in Abhängigkeit von a die Koordinaten des Wendepunkts W_a von K_a an, der den kleinsten positiven x-Wert hat.

Die Funktion $y = \sin(x)$ besitzt den Wendepunkt $W(\pi | 0)$ mit kleinstem positivem x-Wert.

Das Schaubild K_a entsteht aus der Funktion $y = \sin(x)$ durch

- I) Streckung des Schaubildes in y-Richtung mit dem Faktor a
- II) Streckung des Schaubildes in x.-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{a}$
- III) Verschiebung des Schaubildes um a in y-Richtung.

Der Wendepunkt $W(\pi | 0)$ erfährt durch I) – III) folgende Änderungen:

$$\text{I) } W_1(\pi | 0) \quad \text{II) } W_2(\frac{\pi}{a} | 0) \quad \text{III) } W_3 = W_a(\frac{\pi}{a} | a)$$

Zeige, dass der Inhalt dieser Fläche unabhängig von a ist.

Berechnung der Tangentengleichung im Wendepunkt:

Allgemeine Tangentengleichung: $y = f'_a(u) \cdot (x - u) + f_a(u)$

Es gilt $f'_a(x) = a^2 \cdot \cos(ax)$

$$f'_a\left(\frac{\pi}{a}\right) = a^2 \cdot \cos(\pi) = -a^2 \quad \text{und} \quad f_a\left(\frac{\pi}{a}\right) = a \cdot \sin(\pi) + a = a$$

Tangentengleichung im Wendepunkt:

$$y = -a^2 \cdot \left(x - \frac{\pi}{a}\right) + a \Rightarrow y = -a^2 x + \pi a + a$$

Zur Berechnung des Flächeninhalts werden die Schnittpunkte der Tangente mit den Koordinatenachsen benötigt.

Schnittpunkt mit der y-Achse: $y = -a^2 \cdot 0 + \pi a + a = \pi a + a \Rightarrow S_y(0 \mid \pi a + a)$

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$0 = -a^2 x + \pi a + a \Rightarrow x = \frac{-\pi a - a}{-a^2} = \frac{-a \cdot (\pi + 1)}{-a^2} = \frac{\pi + 1}{a} \Rightarrow S_x\left(\frac{\pi + 1}{a} \mid 0\right)$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi + 1}{a} \cdot (\pi a + a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi + 1}{a} \cdot a \cdot (\pi + 1) = \frac{1}{2} (\pi + 1)^2$$

Die Dreiecksfläche ist unabhängig vom Parameter a , was zu zeigen war.

Aufgabe 12: (abgewandelte Abituraufgabe 2012)

a) Welche Koordinaten hat der nördlichste Punkt der Umgehungsstraße?

$$f(x) = -0,1x^3 - 0,3x^2 + 0,4x + 3,2$$

$$f'(x) = -0,3x^2 - 0,6x + 0,4$$

$$f''(x) = -0,6x - 0,6$$

$$f'''(x) = -0,6$$

Hinreichende Bedingung für Hochpunkt: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$

$$-0,3x^2 - 0,6x + 0,4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{0,6 \pm \sqrt{0,36 + 0,48}}{-0,6} = \frac{0,6 \pm 0,917}{-0,6}$$

$$x_1 \approx -2,53 \text{ und } x_2 \approx 0,53$$

Laut dem Schaubild kommt nur $x \approx 0,53$ in Frage.

$$f''(0,53) = -0,918 < 0$$

Mit $f(0,53) = 3,31$ ergibt sich als Hochpunkt $H(0,53|3,31)$.

Wie weit ist dieser Punkt vom Ortsmittelpunkt M entfernt?

Entfernung des Hochpunktes vom Punkt $M(0|0,5)$:

$$\overline{MH} = \sqrt{(0,53 - 0)^2 + (3,31 - 0,5)^2} \approx 2,86 \text{ km}$$

Bestimme den Punkt, in dem diese beiden Abschnitte ineinander übergehen.

Der Punkt, in dem der Übergangspunkt von der Links- in die Rechtskurve übergeht, ist der Wendepunkt des Schaubildes von f .

Hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$.

$$-0,6x - 0,6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$f'''(-1) = -0,6 \neq 0$$

Mit $f(-1) = 2,6$ existiert ein Wendepunkt $W(-1|2,6)$.

Zeige, dass die Umgehungsstraße im Punkt A ohne Knick in die Ortsdurchfahrt einmündet.

Zu zeigen ist, dass der Punkt A auf dem Schaubild von f und auf der Ortsdurchfahrtgeraden liegt.

Da die Ortsdurchfahrt durch A und B verläuft, liegt der Punkt A auf der Geraden. Außerdem gilt $f(-3) = 2$. Daher liegt A auch auf dem Schaubild von f .

Damit die Einmündung ohne Knick erfolgt, muss die Steigung der Geraden AB mit der Steigung der Tangente an das Schaubild von f im Punkt A übereinstimmen.

$$\text{Steigung der Geraden AB: } m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 2}{3 - (-3)} = -0,5$$

$$\text{Steigung der Tangente: } f'(-3) = -0,5$$

Damit ist gezeigt, dass die Einmündung ohne Knick erfolgt.

b) *Wie viel Prozent dieser Fläche liegt außerhalb des Gemeindegebiets?*

Die Gleichung der Ortsdurchfahrt lautet $y = -0,5x + 0,5$

Fläche zwischen dem Schaubild von f und der Gerade AB:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^3 (f(x) - (-0,5x + 0,5)) dx = \int_{-3}^3 (-0,1x^3 - 0,3x^2 + 0,9x + 2,7) dx \\ &= \left[-0,025x^4 - 0,1x^3 + 0,45x^2 + 2,7x \right]_{-3}^3 = 7,425 + 3,375 = 10,8 \text{ km}^2 \end{aligned}$$

Das Gemeindegebiet innerhalb dieser Fläche entspricht einem Halbkreis mit $r = 1,5 \text{ km}$.

$$A_{\text{Halbkreis}} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1,5^2 \approx 3,5 \text{ km}^2$$

Damit liegen $10,8 \text{ km}^2 - 3,5 \text{ km}^2 = 7,3 \text{ km}^2$ außerhalb des Gemeindegebiets.

Dies sind $\frac{7,3}{10,8} \approx 0,676 = 67,6\%$ der Gesamtfläche.

c) *Zeige, dass der Fahrer die Windkraftanlage im Punkt Z(2|2) genau in Fahrtrichtung vor sich sieht.*

Der Fahrer sieht die Windkraftanlage genau vor sich, falls der Punkt P auf der Tangente liegt, die das Schaubild von f im Punkt Q berührt.

$$\text{Steigung der Tangente in Z: } f'(2) = -2$$

$$\text{Steigung der Gerade, die durch P und Z verläuft: } m_{PZ} = \frac{y_P - y_Z}{x_P - x_Z} = \frac{3 - 2}{1,5 - 2} = -2$$

Da die beiden Steigungen übereinstimmen, liegt P auf der Tangente.

Hinweis: Man hätte auch die Gleichung der Tangente in Z aufstellen können und mit einer Punktprobe kontrollieren können, dass der Punkt P auf der Tangente liegt.

- d) In welchem Punkt der Umgehungsstraße fährt ein Fahrzeug parallel zur Ortsdurchfahrt AB?

Die Steigung der Ortsdurchfahrt beträgt $m_{AB} = -0,5$ (siehe a))

Bedingung: $f'(x) = -0,5$

$$-0,3x^2 - 0,6x + 0,4 = -0,5 \Rightarrow -0,3x^2 - 0,6x + 0,9 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \text{ und damit } x = -3 \text{ und } x = 1.$$

$x = -3$ ist der x-Wert von A (Endpunkt der Umgehungsstraße).

Daher hat der gesuchte Punkt den x-Wert $x = 1$.

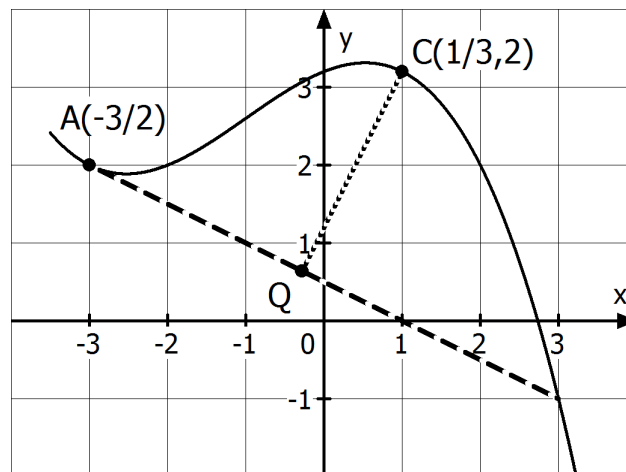
Wegen $f(1) = 3,2$ ist der gesuchte Punkt $C(1|3,2)$.

Welchen Abstand hat ein Fahrzeug auf der Umgehungsstraße höchstens von der Ortsdurchfahrt?

Der Punkt auf der Umgehungsstraße, der den maximalen Abstand zur Ortsdurchfahrt hat, besitzt eine Tangente mit der gleichen Steigung wie die Ortsdurchfahrt.

Eine Autofahrer, der sich im Punkt $C(1|3,2)$ befindet, hat somit den maximalen Abstand zur Umgehungsstraße.

Den Abstand des Punktes C von der Ortsdurchfahrt erhält man über eine Hilfsgerade, die durch C verläuft und senkrecht auf der Gerade AB steht.



Ansatz für Gerade h: $y = m \cdot x + b$

Aufgrund der Orthogonalität gilt $m_h = -\frac{1}{-0,5} = 2$, also $y = 2x + b$

Einsetzen von $C(1|3,2)$: $3,2 = 2 + b \Leftrightarrow b = 1,2$

Die Hilfsgerade hat die Gleichung $y = 2x + 1,2$

Schnittpunkt Q Hilfsgerade h und der Ortsdurchfahrtsgerade $y = -0,5x + 0,5$
 $-0,5x + 0,5 = 2x + 1,2 \Leftrightarrow 2,5x = -0,7 \Leftrightarrow x = -0,28$

Schnittpunkt Q(-0,28|0,64)

Abstand von C(1|3,2) und Q(-0,28|0,64): $d = \sqrt{(1+0,28)^2 + (3,2-0,64)^2} \approx 2,9 \text{ km}$

Der Abstand eines Fahrzeugs auf der Umgehungsstraße beträgt von der Ortsdurchfahrt höchstens 2,9 km.

Aufgabe 13-1: (abgewandelte Abituraufgabe 2013)

a) *An welchen Stellen verlaufen die Wände des Stollens am steilsten?*

$$f(x) = 0,02x^4 - 0,82x^2 + 8$$

$$f'(x) = 0,08x^3 - 1,64x$$

$$f''(x) = 0,24x^2 - 1,64$$

$$f'''(x) = 0,48x$$

Die Wände sind am steilsten an den Wendestellen des Schaubildes von $f(x)$.

Hinreichende Bedingung für Wendestellen: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$0,24x^2 - 1,64 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{41}{6} \Rightarrow x \approx \pm 2,61$$

$$f'''(\pm 2,61) \neq 0$$

Die Wände des Stollens sind etwa 2,6 m rechts und links von der Stollenmitte am steilsten.

Welchen Winkel schließen die Wände an diesen Stellen mit der Horizontalen ein?

Der gesuchte Winkel entspricht dem Winkel der Tangente an der Stelle mit der Horizontalen (x-Achse). Dieser Winkel wird Steigungswinkel genannt.

Steigung der Tangente bei $x = -2,61$: $f'(-2,61) \approx 2,86$.

$$\tan \alpha = 2,86 \Rightarrow \alpha \approx 70,7^\circ$$

Da das Schaubild von $f(x)$ symmetrisch zur y-Achse ist, beträgt der Winkel an den steilsten Stellen des Stollens auf beiden Seiten jeweils $70,7^\circ$.

b) *Wie viel Wasser befindet sich in dem Stollen?*

Schnittstellen der waagrechten Gerade $y = 1,7$ mit dem Schaubild von f :

$$0,02x^4 - 0,82x^2 + 8 = 1,7$$

$$\Leftrightarrow 0,02x^4 - 0,82x^2 + 6,3 = 0 \quad \text{Substitution: } u = x^2$$

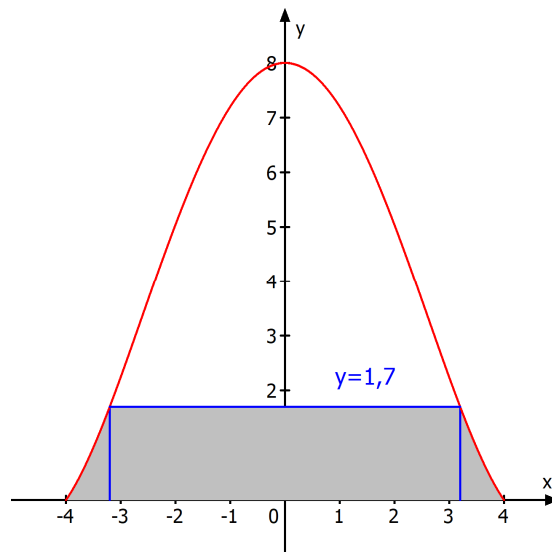
$$0,02u^2 - 0,82u + 6,3 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{0,82 \pm \sqrt{(-0,82)^2 - 4 \cdot 0,02 \cdot 6,3}}{0,04} = \frac{0,82 \pm 0,41}{0,04} \quad u_1 = 30,75 \quad u_2 = 10,25$$

$$\text{Rücksubstitution: } x^2 = 30,75 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 5,55$$

$$x^2 = 10,25 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 3,2$$

Nur die Lösungen $x = -3,2$ und $x = 3,2$ sind relevant.



Inhalt der grauen Grundfläche: $G = 2 \cdot \int_{-4}^{-3,2} f(x) dx + A_{\text{Rechteck}}$

$$A_{\text{Rechteck}} = 6,4 \cdot 1,7 = 10,88 \text{ m}^2$$

$$\int_{-4}^{-3,2} f(x) dx = \left[0,004x^5 - \frac{41}{150}x^3 + 8x \right]_{-4}^{-3,2} \approx -18 - (-18,6) = 0,6$$

$$\text{Grundfläche } G = 2 \cdot \int_{-4}^{-3,2} f(x) dx + A_{\text{Rechteck}} = 2 \cdot 0,6 + 10,88 \approx 12,1 \text{ m}^2$$

$$V_{\text{Wasser}} = 12,1 \cdot 50 = 605 \text{ m}^3$$

Im Stollen befinden sich ca. 605 m³ Wasser.

- c) *Beschreibe ein Verfahren, mit dem rechnerisch ermittelt werden kann, wie groß der kleinste Abstand der Lampe von den Stollenwänden ist.*

Die Lampe befindet sich im Punkt $L(0|6)$.

Der Punkt $P(u|f(u))$ ist ein allgemeiner Punkt, der auf dem Schaubild von f liegt.

Allgemeiner Abstand von L zu P :

$$\text{Abstandsformel: } d(u) = \sqrt{(x_P - x_L)^2 + (y_P - y_L)^2} = \sqrt{(u - 0)^2 + (f(u) - 6)^2}$$

Von der Funktion $d(u)$ muss das absolute Minimum berechnet werden.

Bedingung für lokales Minimum: $d'(u) = 0$ und $d''(u) > 0$

Mit Hilfe einer Randwertuntersuchung wird das absolute Minimum bestimmt.

Aufgabe 13-2: (abgewandelte Abituraufgabe 2013)

Für welche Werte von t besitzt f_t mehr als eine Nullstelle?

Berechnung der Nullstellen: $f_t(x) = 0$

$$(x-1) \cdot \left(1 - \frac{1}{t} \cdot e^x\right) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

I) $x_1 = 1$

II) $1 - \frac{1}{t} \cdot e^x = 0 \quad \Leftrightarrow e^x = t \quad \Rightarrow x_2 = \ln(t) \quad (\text{für } t > 0)$

Sonderfall: $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \ln(t) = 1 \Leftrightarrow t = e$

Ergebnis: Für $t > 0$ und $t \neq e$ besitzt f_t mehr als eine Nullstelle.

Aufgabe 14-1: (abgewandelte Abituraufgabe 2013)

a) *Bestimme die maximale Zuflussrate.*

$$r(t) = 10000 \cdot (e^{-0,5t} - e^{-t})$$

$$r'(t) = 10000 \cdot (-0,5e^{-0,5t} + e^{-t})$$

$$r''(t) = 10000 \cdot (0,25e^{-0,5t} - e^{-t})$$

$$r'''(t) = 10000 \cdot (-0,125e^{-0,5t} + e^{-t})$$

Gesucht ist der Hochpunkt des Schaubildes von r .

Hinreichende Bedingung: $r'(t) = 0$ und $r''(t) < 0$

$$10000 \cdot (-0,5e^{-0,5t} + e^{-t}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -0,5e^{-0,5t} + e^{-t} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-t} \cdot (-0,5e^{0,5t} + 1) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

I) $e^{-t} = 0$ ist nicht lösbar

$$\text{II) } -0,5e^{0,5t} + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow e^{0,5t} = 2 \quad \Leftrightarrow t = 2\ln(2) \approx 1,39$$

$r''(2\ln(2)) < 0$, also Hochpunkt

Mit $r(2\ln(2)) = 2500$ ergibt sich als Hochpunkt $H(2\ln(2) | 2500)$

Die maximale Zuflussrate beträgt 2500 Liter pro Stunde.

Zu welchem Zeitpunkt nimmt die momentane Zuflussrate am stärksten ab?

Gesucht ist die Wendestelle des Schaubildes von r .

Hinreichende Bedingung: $r''(t) = 0$ und $r'''(t) \neq 0$

$$10000 \cdot (0,25e^{-0,5t} - e^{-t}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 0,25e^{-0,5t} - e^{-t} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-t} \cdot (0,25e^{0,5t} - 1) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

I) $e^{-t} = 0$ ist nicht lösbar

$$\text{II) } 0,25e^{0,5t} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow e^{0,5t} = 4 \quad \Leftrightarrow t = 2\ln(4) \approx 2,77$$

$r'''(2\ln(4)) \neq 0$, also Wendepunkt.

Die momentane Zuflussrate nimmt etwa 2,8 Stunden nach Regenbeginn am stärksten ab.

b) *Wie viel Wasser befinden sich drei Stunden nach Regenbeginn im Tank?*

Da die Funktion r die momentane Zuflussrate beschreibt, ergibt sich die Wassermenge zu einem bestimmten Zeitpunkt über die Berechnung eines Integrals.

$$\int_0^3 r(t) dt = \left[10000 \cdot (-2e^{-0,5t} + e^{-t}) \right]_0^3 \approx -3964,7 + 10000 = 6035,3 \text{ Liter}$$

In den ersten drei Stunden nach Regenbeginn sind etwa 6035 Liter Wasser in den Tank geflossen. Da der Tank zu Beginn leer war, entspricht das folglich auch der Menge, die sich nach 3 Stunden im Tank befindet.

c) *Wie viel Wasser wird in den ersten 12 Stunden nach Regenbeginn entnommen?*

Die Entnahme des Wassers wird durch den Term „-400“ dargestellt. Dieser bedeutet, dass pro Stunde 400 Liter Wasser entnommen werden.

In den ersten 12 Stunden nach Regenbeginn werden $9 \cdot 400 = 3600$ Liter Wasser entnommen (in den ersten 3 Stunden nach Regenbeginn wird noch kein Wasser entnommen)

Ab welchem Zeitpunkt nimmt die Wassermenge im Tank ab?

Solange sich das Schaubild von w oberhalb der t -Achse befindet, ist die Zuflussrate positiv und die Wassermenge im Tank nimmt zu.

Gesucht ist die Nullstelle der Funktion w : $w(t) = 0$

$$10000 \cdot (e^{-0,5t} - e^{-t}) - 400 = 0 \quad |:10000$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,5t} - e^{-t} - 0,04 = 0 \quad \text{Substitution: } u = e^{-0,5t}$$

$$\Rightarrow -u^2 + u - 0,04 = 0 \quad \Rightarrow u_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-1) \cdot (-0,04)}}{-2} = \frac{-1 \pm 0,917}{-2}$$

$$u_1 \approx 0,959 \quad u_2 \approx 0,0415$$

Rücksubstitution: $e^{-0,5t} = 0,959 \Rightarrow t = 0,084$ (keine Lösung, da $t < 3$)

$$e^{-0,5t} = 0,0415 \Rightarrow t = 6,36$$

Wegen $w(7) < 0$ ist $w(t) < 0$ für $t > 6,36$.

Interpretation: Nach 6,36 Stunden ist die Wassermenge im Tank am größten. Danach nimmt die Wassermenge im Tank ab, da sich das Schaubild von w unterhalb der t -Achse befindet.

Bestimme die maximale Wassermenge im Tank.

$$\int_3^{6,36} w(t) dt = \left[10000 \cdot (-2e^{-0,5t} + e^{-t}) - 400t \right]_3^{6,36} = -3358,4 - (-5164,7) = 1806,3$$

Im Zeitintervall $[3 ; 6,36]$ wächst die Wassermenge im Tank um 1806,3 Liter.
Da nach 3 Stunden bereits 6035,3 Liter im Tank waren (siehe b)) beträgt die maximale Wassermenge 6035,3 Liter + 1806,3 Liter = 7841,6 Liter.

Aufgabe 14-2: (abgewandelte Abituraufgabe 2013)

Berechne A exakt.

$$A = \int_0^1 \sin(\pi \cdot x) dx = \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi \cdot x) \right]_0^1 = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi) + \frac{1}{\pi} \cos(0) = -\frac{1}{\pi} \cdot (-1) + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

Ermittle eine Funktionsgleichung von g.

Da die Nullstellen $x = 0$ und $x = 1$ von g bekannt sind, kann die Funktion in Produktform $g(x) = a \cdot x \cdot (x - 1)$ aufgestellt werden.

Der Parameter a muss nun so gewählt werden, dass sich die gleiche Fläche ergibt, die oben berechnet wurde:

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 a \cdot x \cdot (x - 1) dx = a \cdot \int_0^1 (x^2 - x) dx = a \cdot \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = -\frac{1}{6} a$$

Nun gibt es 2 Fälle:

$$\text{Fall 1: } -\frac{1}{6} a = \frac{1}{\pi} \Leftrightarrow a = -\frac{6}{\pi} \text{ und damit } g(x) = -\frac{6}{\pi} \cdot x \cdot (x - 1)$$

$$\text{Fall 2: } -\frac{1}{6} a = -\frac{1}{\pi} \Leftrightarrow a = \frac{6}{\pi} \text{ und damit } g(x) = \frac{6}{\pi} \cdot x \cdot (x - 1)$$

Hinweis zu Fall 2:

Das Ergebnis des Integrals kann auch negativ sein, wenn sich die Fläche unterhalb der x -Achse befindet.

Aufgabe 15-1: (abgewandelte Abituraufgabe 2014)

a) *Berechne die Koordinaten des Hochpunktes und Wendepunktes.*

$$f(x) = 10x \cdot e^{-0,5x}$$

$$f'(x) = 10e^{-0,5x} + 10x \cdot (-0,5)e^{-0,5x} = e^{-0,5x}(10 - 5x)$$

$$f''(x) = -0,5e^{-0,5x}(10 - 5x) + e^{-0,5x} \cdot (-5) = e^{-0,5x}(-10 + 2,5x)$$

Notwendige Bedingung für Hochpunkt: $f'(x) = 0$

$$e^{-0,5x}(10 - 5x) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

I) $e^{-0,5x} = 0$ ist nicht lösbar

II) $10 - 5x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Da in der Aufgabe vorgegeben ist, dass K einen Hochpunkt besitzt, muss die hinreichende Bedingung nicht mehr überprüft werden.

Mit $f(2) \approx 7,36$ ergibt sich der Hochpunkt $H(2|7,36)$.

Notwendige Bedingung für Wendepunkt: $f''(x) = 0$

$$e^{-0,5x}(-10 + 2,5x) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

I) $e^{-0,5x} = 0$ ist nicht lösbar

II) $-10 + 2,5x = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Da in der Aufgabe vorgegeben ist, dass K einen Wendepunkt besitzt, muss die hinreichende Bedingung nicht mehr überprüft werden.

Mit $f(4) \approx 5,41$ ergibt sich der Wendepunkt $W(4|5,41)$.

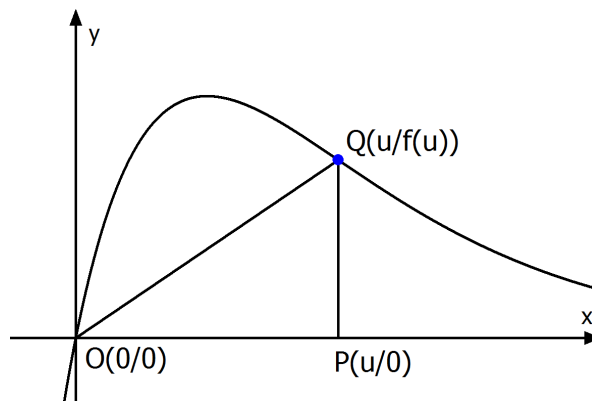
Wie lautet die Gleichung der waagrechten Asymptote von K?

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $f(x) \rightarrow 0$ (Kontrolle z.B. mit Hilfe des WTR)

Gleichung der Asymptote: $y = 0$

b) *Berechne den Wert von u.*

Skizze:



Flächeninhalt des Dreiecks OPQ: $A = \frac{1}{2} \overline{OP} \cdot \overline{PQ}$

Anhand der Punktkoordinaten ergibt sich: $\overline{OP} = u$ und $\overline{PQ} = f(u)$.

Flächeninhaltsfunktion: $A(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u) = 5u^2 \cdot e^{-0,5u}$ (Zielfunktion)

Gesucht ist das globale Maximum der Funktion A:

$$A'(u) = 10u \cdot e^{-0,5u} + 5u^2 \cdot (-0,5)e^{-0,5u} = e^{-0,5u} \cdot (10u - 2,5u^2)$$

Notwendige Bedingung: $A'(u) = 0$

$$e^{-0,5u} \cdot u \cdot (10 - 2,5u) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

I) $e^{-0,5u} = 0$ ist nicht lösbar

II) $u = 0$ (kommt wegen $u > 0$ nicht in Betracht)

III) $10 - 2,5u = 0 \Leftrightarrow u = 4$

Aufgrund der Hinweise in der Aufgabe muss die hinreichende Bedingung nicht geprüft werden.

Für $u = 4$ ist der Flächeninhalt des Dreiecks maximal.

$$\text{c) } \frac{1}{3} \cdot \int_u^{u+3} f(x) dx = 2,2$$

Bei der Formel handelt es sich um die Berechnung eines Mittelwertes im Intervall $[u ; u+3]$.

Fragestellung: Gesucht ist ein Intervall der Länge 3, in welchem der Mittelwert der Funktion 2,2 beträgt.

Aufgabe 15-2: (abgewandelte Abituraufgabe 2014)

Berechne die Extrempunkte der Funktionenschar.

$$f_t(x) = \frac{1}{3}x^3 - t^2x \qquad f'_t(x) = x^2 - t^2 \qquad f''_t(x) = 2x$$

Hinreichende Bedingung für Extrempunkte: $f'_t(x) = 0$ und $f''_t(x) \neq 0$

$$x^2 - t^2 = 0 \Rightarrow x = \pm t$$

$f''_t(t) = 2t > 0$ also Tiefpunkt

Da $f(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^3 = -\frac{2}{3}t^3$ ergibt sich als Tiefpunkt $T(t | -\frac{2}{3}t^3)$

$f''_t(-t) = -2t > 0$ also Hochpunkt

Da $f(-t) = -\frac{1}{3}t^3 + t^3 = \frac{2}{3}t^3$ ergibt sich als Hochpunkt $H(-t | \frac{2}{3}t^3)$

Gib die Ortskurve der Hochpunkte der Schar an.

Koordinaten des Hochpunktes: $H(-t | \frac{2}{3}t^3)$

$$x = -t \quad (1) \quad \text{und} \quad y = \frac{2}{3}t^3 \quad (2)$$

Aus (1) folgt $t = -x$

Eingesetzt in (2): $y = \frac{2}{3}(-x)^3 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x^3$ Ortskurve der Hochpunkte

Gibt es Punkte auf der Ortskurve, auf denen kein Hochpunkt der Schar liegt?

Wegen $t > 0$ können die Hochpunkte $H(-t | \frac{2}{3}t^3)$ nur negative x-Werte annehmen.

Daher sind auch nur die Punkte auf der Ortskurve $y = -\frac{2}{3}x^3$ mit Hochpunkten belegt, bei denen $x < 0$ ist.

Auf allen Punkten der Ortskurve mit $x \geq 0$ liegen keine Hochpunkte der Schar.

Aufgabe 16-1: (abgewandelte Abituraufgabe 2014 und 2015)

a) *Wie tief ist der Laderaum in der Mitte?*

Es gilt $f(0) = 0$ und $f(5) = 5$.

Die Höhe des Laderaums beträgt 5m.

Wie breit ist er in 3 m Höhe?

Bedingung: $f(x) = 3$

$$\frac{1}{125}x^4 = 3 \Leftrightarrow x^4 = 375 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{375} \approx \pm 4,4$$

Die Breite des Laderaums beträgt ca. 8,80 Meter.

In welchem Bereich hat der Boden des Laderaums eine Neigung unter 5%?

Eine Gerade hat eine Neigung von 5%, wenn sie eine Steigung von

$$m = \frac{5}{100} = 0,05 \text{ besitzt.}$$

Gesucht ist das Intervall der Funktion, in der der Betrag der Steigung unter 0,05 liegt.

Zunächst berechnen wir die Stelle des Kahns, an der die Steigung genau 0,05 beträgt.

$$f'(x) = \frac{4}{125}x^3$$

Bedingung: $f'(x) = 0,05$

$$\frac{4}{125}x^3 = 0,05 \Leftrightarrow x^3 = 1,5625 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1,5625} \approx 1,16$$

Anhand des Schaubildes ergibt sich, dass im Intervall $(-1,16 ; 1,16)$ eine Neigung von unter 5% existiert.

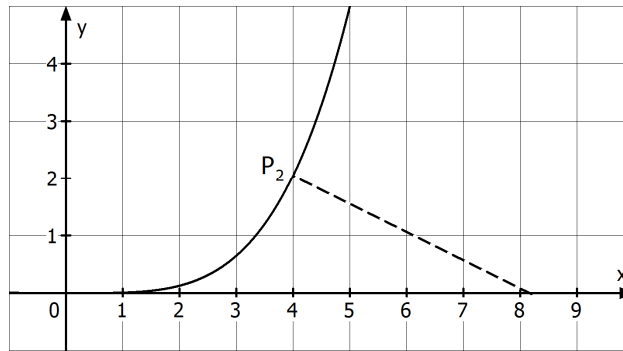
Berechne das Volumen des Laderaums.

Querschnitt des Laderaums:

$$\int_{-5}^5 (5 - f(x)) dx = \left[5x - \frac{1}{625}x^5 \right]_{-5}^5 = 20 - (-20) = 40 \text{ m}^2$$

Volumen des Laderaums: $V = \text{Grundfläche} \cdot \text{Länge} = 40\text{m}^2 \cdot 50\text{m} = 2000\text{m}^3$

b) In welchem Abstand voneinander enden diese Stützen auf der Plattform?



Gesucht ist die Schnittstelle der Normalen in P_2 mit der x-Achse.

Aufstellen der Normalengleichung in P_2 : $y = -\frac{1}{f'(4)} \cdot (x - 4) + f(4)$

Es gilt $f(4) \approx 2,048$ und $f'(4) \approx 2,048$.

Normalengleichung: $y = -\frac{1}{2,048}(x - 4) + 2,048 \Rightarrow y = -0,488x + 4$

Schnittpunkt der Normale mit der x-Achse: $0 = -0,488x + 4 \Rightarrow x \approx 8,2$

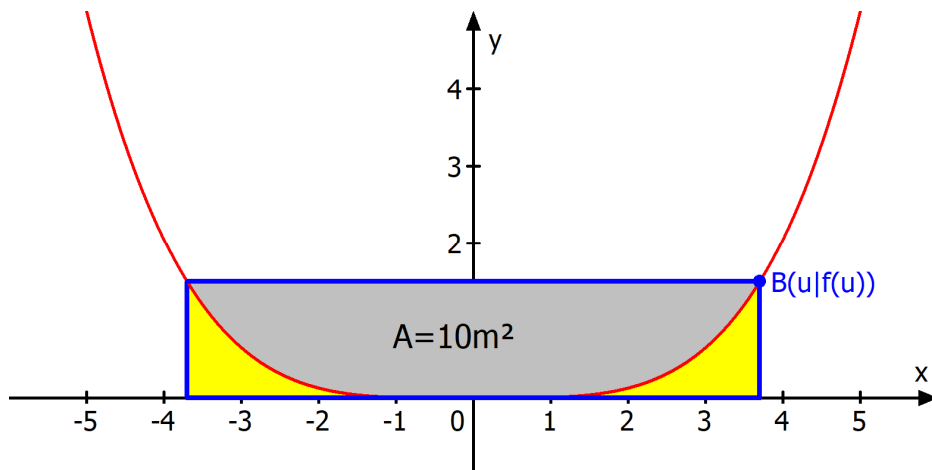
Aus Symmetriegründen schneidet die Normale in P_1 die x-Achse bei $x \approx -8,2$

Der Abstand der Enden der beiden Stützen beträgt $2 \cdot 8,2\text{m} = 16,4\text{m}$

c) Berechne die Breite der Zwischendecke.

Wenn das Volumen des unteren Teilraums 500m^3 beträgt, ergibt sich daraus die

Querschnittsfläche $A = \frac{500\text{m}^3}{50\text{m}} = 10\text{m}^2$



Formel für die graue Querschnittsfläche: $A = A_{\text{Rechteck}} - \int_{-u}^u f(x) dx$

Das Integral entspricht der gelb gefärbten Fläche.

$$A_{\text{Rechteck}} = 2u \cdot f(u)$$

$$\text{Bedingung: } 10 = 2 \cdot u \cdot f(u) - \int_{-u}^u f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 10 &= 2u \cdot \frac{1}{125} u^4 - \int_{-u}^u \frac{1}{125} x^4 dx = \frac{2}{125} u^5 - \left[\frac{1}{625} x^5 \right]_{-u}^u = \frac{2}{125} u^5 - \left(\frac{1}{625} u^5 + \frac{1}{625} u^5 \right) \\ &= \frac{8}{625} u^5 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 10 = \frac{8}{625} u^5 \quad \Leftrightarrow u = \sqrt[5]{781,25} \approx 3,8$$

Breite der Zwischendecke: $2 \cdot 3,8\text{m} = 7,6\text{m}$

Aufgabe 16-2: (abgewandelte Abituraufgabe 2014 und 2015)

a) G_a besitzt einen Extrempunkt. Bestimme dessen Koordinaten.

Gegenüber der üblichen Vorgehensweise bei der Extrempunktberechnung ($f'_a(x) = 0$ und $f''_a(x) \neq 0$) ist es hier einfacher, auf Basis der bekannten Extrempunkte der Funktion $y = \cos(x)$ die Extrempunkte des Schaubildes von $f_a(x)$ herzuleiten.

Extrempunkt von $y = \cos(x)$ im Intervall $-\pi < x < \pi$: $H(0|1)$

1.Schritt: Streckung des Schaubildes mit Faktor a ergibt die Funktion
 $y = a \cdot \cos(x)$.

Der Hochpunkt der neuen Funktion lautet $H(0|a)$

2.Schritt: Verschiebung des Schaubildes in y -Richtung um a^2 nach unten.

$$y = a \cdot \cos(x) - a^2$$

Der Hochpunkt der neuen Funktion lautet $H(0 | a - a^2)$

Dies ist der gesuchte Extrempunkt.

b) *Durch welche Punkte der y-Achse verläuft kein Graph G_a ?*

Das Schaubild G_a schneidet die y-Achse im in a) berechneten Hochpunkt $H(0/a - a^2)$ für $a > 0$.

Nun ist zu prüfen, welche Werte der Term $a - a^2$ für $a > 0$ angenommen werden kann.

Hierzu wird die Funktion $g(a) = a - a^2$ mit $a > 0$ betrachtet.
Das Schaubild von g ist eine nach unten geöffnete Parabel.

Notwendige Bedingung Hochpunkt der Parabel: $g'(a) = 0$
 $1 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0,5$

Es gilt $g(0,5) = 0,25$
Für $a \rightarrow +\infty$ gilt $g(a) \rightarrow -\infty$.

Für $a > 0$ nimmt die Funktion g Werte im Intervall $(-\infty; 0,25]$ an.

Einzeichnen der Funktion $h(a) = a - a^2$ für $a > 0$ in den GTR:

Daher verläuft durch Punkte $P(0/y)$ mit $y > 0,25$ kein Graph G_a .

Aufgabe 17-1: (abgewandelte Abituraufgabe 2016)

a) *Bestimme die maximale momentane Änderungsrate der Schneehöhe.*

$$s(t) = 16e^{-0,5t} - 14e^{-t} - 2$$

$$s'(t) = -8e^{-0,5t} + 14e^{-t}$$

$$s''(t) = 4e^{-0,5t} - 14e^{-t}$$

Gesucht ist der Hochpunkt des Schaubildes von s .

Hinreichende Bedingung: $s'(t) = 0$ und $s''(t) \neq 0$

$$-8e^{-0,5t} + 14e^{-t} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,5t}(-8 + 14e^{-0,5t}) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

I) $e^{-0,5t} = 0$ ist nicht lösbar

$$\text{II) } -8 + 14e^{-0,5t} = 0 \quad \Leftrightarrow t \approx 1,12$$

$$s''(1,12) = -2,28 < 0, \text{ also relatives Maximum}$$

$$\text{Mit } s(1,12) \approx 2,57$$

Die maximale momentane Änderungsrate beträgt 2,57 cm/Stunde.

Ermittle den Zeitraum, in dem die momentane Änderungsrate der Schneehöhe größer als 2 cm pro Stunde ist.

Zunächst wird ermittelt, zu welchem Zeitpunkt die momentane Änderungsrate genau 2 cm/Stunde beträgt.

$$\text{Bedingung: } s(t) = 2$$

$$16e^{-0,5t} - 14e^{-t} - 2 = 2 \quad \Leftrightarrow 16e^{-0,5t} - 14e^{-t} - 4 = 0 \quad \text{Substitution } u = e^{-0,5t}$$

$$-14u^2 + 16u - 4 = 0 \quad \Rightarrow u_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 224}}{-28} \approx \frac{-16 \pm 5,66}{-28}$$

$$u_1 \approx 0,37 \text{ und } u_2 \approx 0,77$$

$$\text{Rücksubstitution: } e^{-0,5t} = 0,37 \Rightarrow t \approx 2 \quad (\text{entspricht 12 Uhr})$$

$$e^{-0,5t} = 0,77 \Rightarrow t \approx 0,5 \quad (\text{entspricht 10.30 Uhr})$$

Aus dem Schaubild ergibt sich:

Die momentane Änderungsrate ist im Zeitraum 10.30 Uhr bis 12 Uhr größer als 2 cm pro Stunde.

Wie hoch liegt der Schnee um 12.00 Uhr?

$$\int_0^2 s(t) dt = \left[-32e^{-0,5t} + 14e^{-t} - 2t \right]_0^2 \approx -13,88 - (-18) = 4,12$$

Die Schneehöhe um 12 Uhr beträgt $150\text{cm} + 4,12\text{cm} = 154,12\text{ cm}$.

- b) *Bestimme einen integralfreien Funktionsterm, der die Schneehöhe zum Zeitpunkt t beschreibt.*

$$h(t) = \frac{1}{-0,5} \cdot 16e^{-0,5t} - \frac{1}{-1} \cdot 14e^{-t} - 2t + C = -32e^{-0,5t} + 14e^{-t} - 2t + C$$

Bedingung: $h(0) = 150$

$$h(0) = -32 + 14 + C = 150 \Rightarrow C = 168$$

Der gesuchte Funktionsterm lautet $h(t) = -32e^{-0,5t} + 14e^{-t} - 2t + 168$

- c) *Berechne den Wert von a , damit um 18.00 Uhr die Schneehöhe 160cm beträgt.*

Ohne Schneekanonen beträgt die Schneehöhe um 18 Uhr

$$h(8) = 151,42\text{ cm}.$$

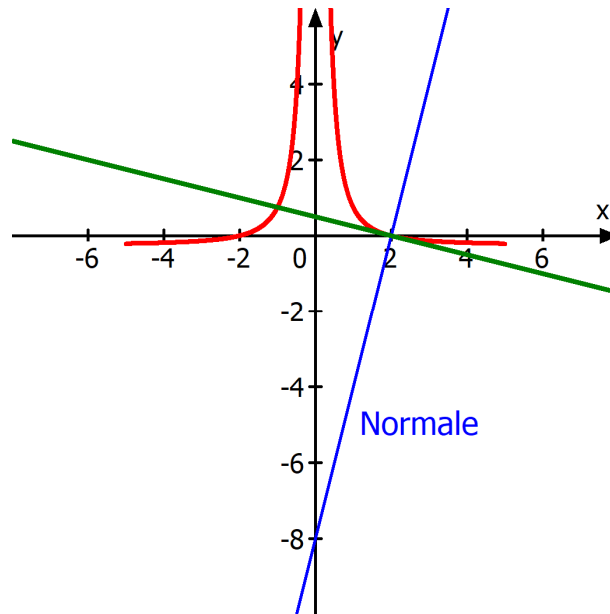
Die Schneekanone muss daher in einem Zeitraum von 5,5 Stunden eine zusätzliche Schneehöhe $160\text{ cm} - 151,42\text{ cm} = 8,58\text{ cm}$ liefern.

Hierzu muss sie pro Stunde eine Leistung von $\frac{8,58\text{cm}}{5,5\text{h}} = 1,56 \frac{\text{cm}}{\text{h}}$ liefern.

Somit ist $a = 1,56$.

Aufgabe 17-2: (abgewandelte Abituraufgabe 2016)

Berechne die Koordinaten des Mittelpunkts des Kreises.



Nullstellen von h : $h(x) = 0$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Der Mittelpunkt des Kreises liegt auf der y-Achse, da das Schaubild von h symmetrisch zur y-Achse ist.

Die Tangente an das Schaubild von $h(x)$ an der Nullstelle $x = 2$ entspricht einer Tangente an den Kreis.

Die Verbindungsstrecke vom Mittelpunkt des Kreises zum Berührungspunkt $N(2|0)$ steht senkrecht zur Tangente.

Somit liegt die Verbindungsstrecke auf der Normalen an h an der Stelle $x = 2$.

Ansatz für Normalengleichung: $y = -\frac{1}{h'(2)} \cdot (x - 2) + h(2)$

Es gilt $h(2) = 0$ und $h'(2) = -0,25$

Normalengleichung: $y = -\frac{1}{-0,25}(x - 2) + 0 \Leftrightarrow y = 4x - 8$

Die Normale schneidet die y-Achse im Punkt $M(0|-8)$.
 M ist der Mittelpunkt des Kreises.

Aufgabe 18-1: (abgewandelte Abituraufgabe 2017)

a) *Bestimme die minimale momentane Zuflussrate.*

Die minimale momentane Zuflussrate existiert an der Stelle, an der das Schaubild von z einen Tiefpunkt besitzt.

Die Zuflussrate ist minimal für $t = 18$.

Wegen $z(18) = 5$ beträgt die minimale Zuflussrate $5000 \text{ m}^3/\text{Stunde}$.

In welchem Zeitraum nimmt die Wassermenge im Stausee ab?

Die Wassermenge im Stausee nimmt ab, wenn das Schaubild der Abflussratenfunktion oberhalb des Schaubildes der Zuflussratenfunktion liegt.

Bedingung: $a(t) > z(t)$

Zunächst werden die Schnittstellen der Schaubilder der Funktionen a und z berechnet: $a(t) = z(t)$

$$20 \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) + 25 = 19 \quad \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) = -0,3$$

$$\frac{\pi}{12}t \approx -0,305 \Leftrightarrow t \approx -1,165 \quad \text{bzw. eine Periode später } t \approx -1,165 + 24 = 22,8$$

$$\frac{\pi}{12}t \approx \pi - (-0,305) = 3,45 \Leftrightarrow t \approx 13,2$$

Mit Berücksichtigung des angegebenen Schaubildes nimmt die Wassermenge im Stausee ab im Zeitraum zwischen 13,2 und 22,8 Stunden nach Beobachtungsbeginn, da in diesem Intervall das Schaubild von z unterhalb des Schaubildes von a liegt.

Bestimme die maximale momentane Änderungsrate der Wassermenge.

Die maximale momentane Änderungsrate der Wassermenge existiert zu dem Zeitpunkt, bei dem die Differenz der Zu- und Abflussrate maximal wird.

Zu bestimmen ist das Maximum des Schaubildes der Funktion $d(t) = z(t) - a(t)$.

Das Schaubild von d besitzt dieselben Extremstellen wie das Schaubild von z .

Das Schaubild von d besitzt einen Hochpunkt an der Stelle $t = 6$.

Es gilt $d(6) = z(6) - 19 = 45 - 19 = 26$

Die maximale momentane Änderungsrate der Wassermenge beträgt $26000 \text{ m}^3/\text{h}$.

b) *Bestimme die Wassermenge im Stausee 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn.*

$$\int_0^{12} (z(t) - a(t)) dt = \left[-20 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} t\right) \cdot \frac{12}{\pi} + 25t - 19t \right]_0^{12} \approx 148,4 + 76,4 = 224,8$$

Wassermenge nach 12 Stunden:

$$224,8 \cdot 1000 \text{ m}^3 + 2500000 = 2.724.800 \text{ m}^3$$

Zeige, dass die Wassermenge in jedem 24-Stunden-Zeitraum exakt um 144 000 m³ zunimmt.

Zunahme der Wassermenge in den ersten 24 Stunden:

$$\int_0^{24} (z(t) - a(t)) dt = \left[-20 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} t\right) \cdot \frac{12}{\pi} + 25t - 19t \right]_0^{24} = -\frac{240}{\pi} + 6 \cdot 24 + \frac{240}{\pi} = 144$$

Die Wassermenge nimmt in den ersten 24 Stunden um 144.000 m³ zu.

Begründung, dass dieser Wert für jedes 24-Stunden-Intervall gilt:

Die Funktion $d(t) = z(t) - a(t)$ besitzt die Periode 24, da $z(t)$ die Periode

$$p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24 \text{ besitzt und die Abflussratenfunktion } a(t) \text{ konstant ist.}$$

Welchen Wert müsste die konstante Abflussrate haben, damit nach Ablauf von 14 Tagen die Wassermenge im Stausee 4 180 000 m³ betragen würde?

$$\int_0^{336} z(t) dt = \left[-20 \cos\left(\frac{\pi}{12} t\right) \cdot \frac{12}{\pi} + 25t \right]_0^{336} \approx 8323,6 + 76,4 = 8400$$

In 14 Tagen (also in 336 Stunden) würde die Wassermenge ohne Berücksichtigung einer Abflussrate $8400 \cdot 1000 \text{ m}^3 + 2500000 \text{ m}^3 = 10.900.000 \text{ m}^3$ betragen.

Die konstante Abflussrate muss so gewählt werden, dass

$$10\,900\,000 \text{ m}^3 - 4\,180\,000 \text{ m}^3 = 6\,720\,000 \text{ m}^3 \text{ in den 14 Tagen abfließen.}$$

$$\text{Dies entspricht pro Stunde einer Abflussrate von } \frac{6720000}{336} = 20000 \text{ m}^3/\text{h}.$$

Die konstante Abflussrate müsste 20.000 m³/h betragen.

Aufgabe 18-2: (abgewandelte Abituraufgabe 2017)

- a) *Bestimme den prozentualen Anteil der Strecke HT an der Strecke PQ.*

Aus dem Schaubild kann abgelesen werden:

Hochpunkt H(2|6) und Tiefpunkt T(4|2)

Gleichung der Gerade g durch H und T: $y = mx + c$

$$\text{Steigung der Gerade: } m = \frac{6-2}{2-4} = -2$$

Einsetzen des Punktes H(2|6) in die Gerade: $6 = -2 \cdot 2 + c \Rightarrow c = 10$

Die Gleichung der Geraden lautet $y = -2x + 10$

Schnittpunkt von g mit der y-Achse: P(0|10)

Schnittpunkt von g mit der x-Achse: Q(5|0)

Berechnung der Strecken:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(5-0)^2 + (0-10)^2} = \sqrt{125} \quad \text{und} \quad \overline{HT} = \sqrt{(4-2)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{20}$$

$$\text{Prozentualer Anteil: } \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{125}} = 0,4 = 40\%$$

- b) *Begründe, dass die Steigung des Graphen von f keine Werte kleiner als -3 annehmen kann.*

Es gilt

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

$$f''(x) = 6x - 18$$

$$f'''(x) = 6$$

Das Schaubild von f besitzt an der Wendestelle die kleinste Steigung.

Hinreichende Bedingung für Wendestelle: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$6x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$f'''(3) = 6 \neq 0$, damit existiert bei $x = 3$ eine Wendestelle

$$\text{Es gilt } f'(3) = 27 - 54 + 24 = -3$$

Die Steigung der Tangente im Wendepunkt beträgt $m = -3$.

Damit ist $m = -3$ die kleinste Steigung.

- c) Die Gleichung $f(x) = a$ gibt anschaulich die Schnittstellen des Schaubildes von f mit der waagrechten Geraden $y = a$ an.

Für $a < 2$ besitzt die Gleichung $f(x) = a$ genau eine Lösung.

Für $a = 2$ besitzt die Gleichung $f(x) = a$ zwei Lösungen.

Für $2 < a < 6$ besitzt die Gleichung $f(x) = a$ drei Lösungen.

Für $a = 6$ besitzt die Gleichung $f(x) = a$ zwei Lösungen.

Für $a > 6$ besitzt die Gleichung $f(x) = a$ genau eine Lösung.

Aufgabe 19-1: (abgewandelte Abituraufgabe 2018)

a) *Gib die globale Durchschnittstemperatur zu Beginn des Jahres 1900 an.*

$$f(0) = 13,9^\circ\text{C}$$

Die globale Durchschnittstemperatur beträgt $13,9^\circ\text{C}$.

Berechne die niedrigste globale Durchschnittstemperatur seit 1900.

Gesucht ist der Tiefpunkt des Schaubildes von f .

$$f'(t) = 2,8 \cdot e^{0,008t} \cdot 0,008 - 0,03 = 0,0224e^{0,008t} - 0,03$$

$$f''(t) = 0,0224 \cdot e^{0,008t} \cdot 0,008 = 0,0001792 \cdot e^{0,008t}$$

Hinreichende Bedingung für einen Tiefpunkt: $f'(t) = 0$ und $f''(t) > 0$

$$0,0224e^{0,008t} - 0,03 = 0 \quad \Leftrightarrow t \approx 36,5$$

$$f''(36,5) > 0$$

Mit $f(36,5) \approx 13,75$ beträgt die niedrigste globale Durchschnittstemperatur $13,75^\circ\text{C}$.

Berechne die momentane Änderungsrate der globalen Durchschnittstemperatur zu Beginn des Jahres 2000.

$$\text{Es gilt } f'(100) = 0,0224 - 0,03 \approx 0,02$$

Die momentane Änderungsrate zu Beginn des Jahres 2000 beträgt ca. $0,02^\circ\text{C}$ pro Jahr.

Bestimme den Mittelwert der globalen Durchschnittstemperatur im durch die Modellierung beschriebenen Zeitraum.

$$\frac{1}{200 - 0} \cdot \int_0^{200} f(t) dt = \frac{1}{200} \cdot \left[\frac{2,8}{0,008} e^{0,008t} - 0,015t^2 + 11,1 \cdot t \right]_0^{200}$$

$$\approx \frac{1}{200} \cdot (3353,56 - 350) \approx 15,02^\circ\text{C}$$

Der Mittelwert beträgt ca. 15°C .

- b) Formuliere eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $f(t+10) - f(t) = 0,5$ führt.

Fragestellung:

In welchem 10-Jahres-Zeitraum steigt die globale Durchschnittstemperatur um $0,5^\circ\text{C}$?

Zeige, dass dieser Anstieg immer schneller verläuft.

Es ist zu zeigen, dass die Steigung des Graphen wächst.

Das bedeutet, dass die Ableitungsfunktion $f'(t)$ streng monoton wächst.

Zu zeigen: $f''(t) > 0$

$$f''(t) = 0,0001792 \cdot e^{0,008t} > 0 \text{ für alle Werte von } t.$$

Damit ist f' streng monoton wachsend.

- c) *Zeige, dass zum Zeitpunkt $t_0 \approx 122$ die Maßnahmen greifen müssen, damit die globale Durchschnittstemperatur $15,7^\circ\text{C}$ bis zum Beginn des Jahres 2050 nicht überschreiten wird.*

Wenn die momentane Änderungsrate ab $t_0 \approx 122$ konstant bleibt, verläuft das Schaubild ab diesem Zeitpunkt tangential weiter.

Ansatz für die Tangentengleichung: $y = f'(122) \cdot (x - 122) + f(122)$

Es gilt $f(122) \approx 14,9$ und $f'(122) \approx 0,03$

$$y = 0,03 \cdot (x - 122) + 14,9$$

$$y = 0,03x + 11,24$$

Für $x = 150$ gilt $y = 0,03 \cdot 150 + 11,24 \approx 15,7$

Damit ist gezeigt, dass im Jahr 2050 die globale Durchschnittstemperatur $15,7^\circ\text{C}$ beträgt.

Aufgabe 19-2:

a) *Begründe, dass der Graph von f_a achsensymmetrisch zur y-Achse ist.*

Der Graph von f_a ist symmetrisch zur y-Achse, da der Funktionsterm nur gerade Hochzahlen bei der Variable x besitzt.

Zeige, dass die Nullstellen der Funktion f_a unabhängig von a sind.

$$\text{Bedingung: } f_a(x) = 0$$

$$-ax^4 + 4ax^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow ax^2 \cdot (-x^2 + 4) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

$$\text{Gleichung I): } ax^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Gleichung II): } -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

Alle 3 Nullstellen sind unabhängig von a.

b) *Bestimme a so, dass beide Flächen den gleichen Inhalt haben.*

Inhalt der Fläche zwischen dem Schaubild von g und der x-Achse:

$$A_1 = \int_0^2 g(x) dx = \left[-\frac{32}{15} \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) \cdot \frac{2}{\pi} \right]_0^2 = -\frac{32}{15} \pi \cdot (-1) \cdot \frac{2}{\pi} + \frac{32}{15} \pi \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{128}{15}$$

Inhalt der Fläche zwischen dem Schaubild von f_a und der x-Achse:

$$A_2 = \int_0^2 (-ax^4 + 4ax^2) dx = \left[-\frac{1}{5} ax^5 + \frac{4}{3} ax^3 \right]_0^2 = -\frac{32}{5} a + \frac{32}{3} a = \frac{64}{15} a$$

$$\text{Es soll gelten: } \frac{64}{15} a = \frac{128}{15} \Leftrightarrow a = 2$$

Aufgabe 19-3:

a) Bestimme die Nullstelle von f_k .

Bedingung für Nullstelle: $f_k(x) = 0$

$$k \cdot e^x - 2x \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot (k - 2x) = 0 \quad \text{Lösung mit Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $e^x = 0$ ist nicht lösbar

$$\text{Gleichung II): } k - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{k}{2}$$

b) Zeige, dass f_{k+2} eine Stammfunktion von f_k ist.

$$\text{Es gilt } f_{k+2}(x) = (k+2) \cdot e^x - 2x \cdot e^x$$

Wenn f_{k+2} eine Stammfunktion von f_k ist, dann muss gelten: $f'_{k+2}(x) = f_k(x)$

$$\begin{aligned} f'_{k+2}(x) &= (k+2) \cdot e^x - (2 \cdot e^x + 2x \cdot e^x) \quad (\text{Anwendung der Produktregel}) \\ &= k \cdot e^x + 2 \cdot e^x - 2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x = k \cdot e^x - 2x \cdot e^x = f_k(x) \end{aligned}$$

Damit ist die Stammfunktionseigenschaft nachgewiesen.

Bestimme ihren Inhalt exakt.

Die Funktion f_2 (also $k = 2$) besitzt die Nullstelle $x = \frac{2}{2} = 1$.

Die Grenzen des Integrals sind daher $x = 0$ (y-Achse) und $x = 1$.

$$A = \int_0^1 f_2(x) dx = [f_4(x)]_0^1 = f_4(1) - f_4(0) = 4e^1 - 2e^1 - (4e^0 - 0) = 2e - 4$$