

Ausgewählte Abituraufgaben 2004 - 2018 von Baden-Württemberg

Analysis - Wahlteil

allgemeinbildende Gymnasien – Leistungsfach

**Die Aufgaben wurden teilweise geändert, so dass diese mit
Hilfe eines WTR bearbeitet werden können.**

Alexander Schwarz

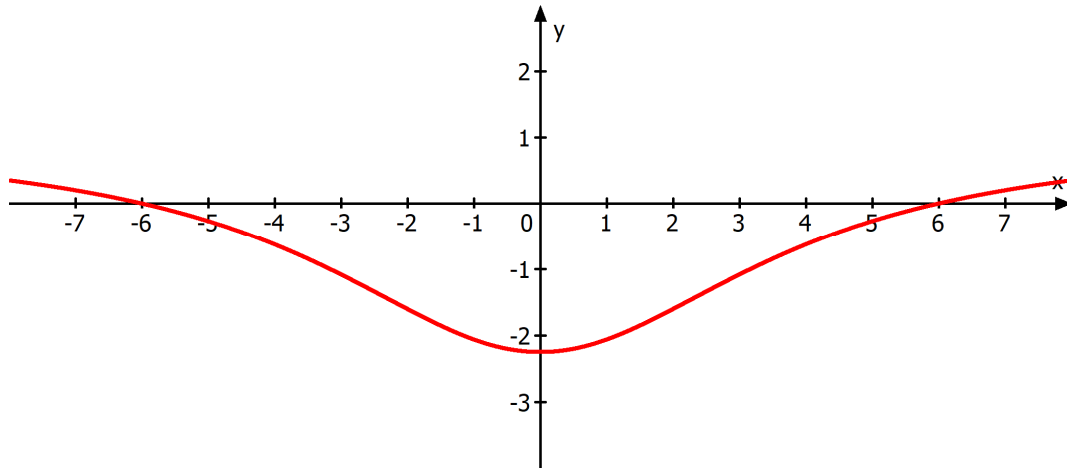
www.mathe-aufgaben.com

April 2021

Aufgabe 1: (abgewandelte Abituraufgabe 2004)

Gegeben ist eine Funktion f durch $f(x) = 1 - \frac{52}{x^2 + 16}$ mit $x \in \mathbb{R}$

Ihr Schaubild sei K .



- a) Gib das Verhalten von K an für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$.
Das Schaubild von K besitzt zwei Wendepunkte. Berechne die Wendestellen.

Nun stellt K für $-6 \leq x \leq 6$ den Querschnitt eines Kanals dar (x und $f(x)$ in Meter, $f(x)$ in Meter). Die sich anschließende Landfläche liegt auf der x -Achse.

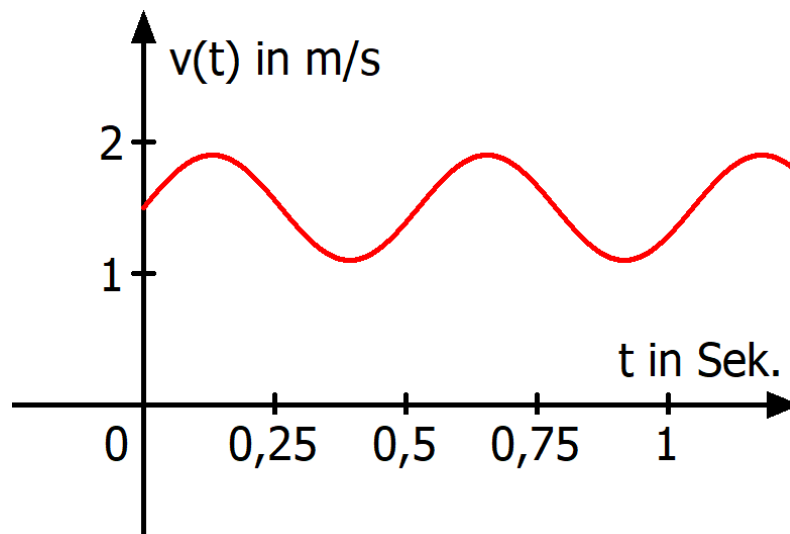
- b) An Land steht eine Person.
In welcher Entfernung vom Kanalrand darf sie höchstens stehen, damit sie bei leerem Kanal die tiefste Stelle des Kanals sehen kann (Augenhöhe 1,50 m)?

Aufgabe 2: (abgewandelte Abituraufgabe 2004)

Die Geschwindigkeit eines Schwimmers schwankt periodisch um einen Wert. Messungen beim Training haben gezeigt, dass sich die Bewegung näherungsweise durch die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion v mit

$$v(t) = 0,4 \cdot \sin(12t) + 1,5 \text{ mit } t \geq 0$$

beschreiben lässt (t ist die Zeit in s, Geschwindigkeit $v(t)$ in m/s).



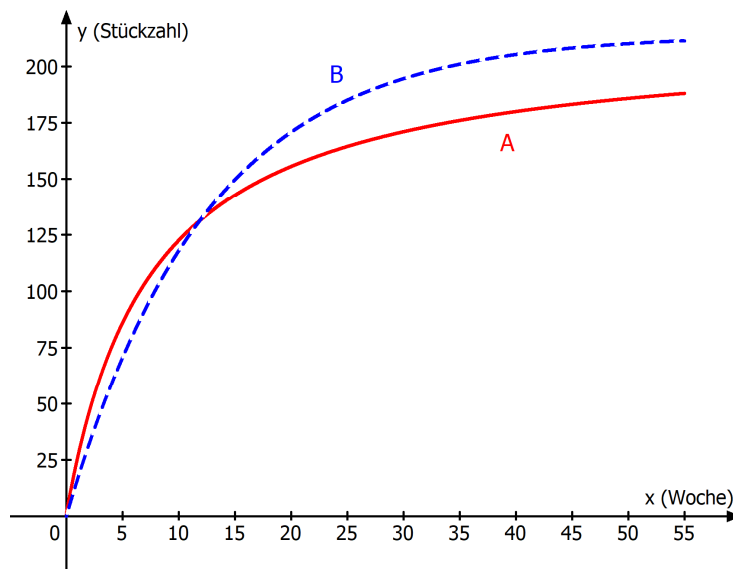
- a) Bestimme die Periodendauer.
- b) Zwischen welchen Werten schwankt die Geschwindigkeit des Schwimmers?
- c) Gib zwei Zeitpunkte an, in denen die Geschwindigkeit am stärksten abnimmt.
- d) Welchen Weg legt der Schwimmer innerhalb von 50 Perioden zurück?

Aufgabe 3: (abgewandelte Abituraufgabe 2005)

Ein Supermarkt A führt eine neue Zahnpasta ein. In den ersten fünf Wochen ergeben sich folgende wöchentliche Verkaufszahlen:

Verkaufswoche	1	2	3	4	5
Verkaufte Stückzahl in dieser Woche	26	46	60	76	86

In einem Modell beschreibt die Funktion f der Form $f(x) = a + \frac{b}{2x+15}$ mit $x \geq 0$ die verkaufte Stückzahl $f(x)$ innerhalb der Verkaufswoche x .



- Bestimme a und b anhand der Werte der ersten und fünften Woche. Zeige rechnerisch, dass die Verkaufszahlen bei Supermarkt A ständig wachsen.
- Berechne näherungsweise, wie viele Tuben Zahnpasta der Supermarkt A in den ersten 52 Wochen insgesamt verkauft werden.
- Gleichzeitig mit dem neuen Supermarkt A bringt der Supermarkt B ein Konkurrenzprodukt auf den Markt. Seine wöchentlichen Verkaufszahlen lassen sich modellhaft durch die Funktion g mit $g(x) = 214 - 214 \cdot e^{-0,08x}$ beschreiben. Mit welchen wöchentlichen Verkaufszahlen kann der Supermarkt B langfristig rechnen?
- Wie kann man anhand der Schaubilder anschaulich ermitteln, nach wie vielen Wochen der Supermarkt A den größten Vorsprung gegenüber Supermarkt B an insgesamt verkauften Tuben hat?

Gegeben ist die Gleichung $\int_0^u g(x) dx = \int_0^u f(x) dx$.

Welche Fragestellung wird mit der Gleichung beantwortet?

Aufgabe 4: (abgewandelte Abituraufgabe 2006)**Teil 1:**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)$ für $0 \leq x \leq 12$

Ihr Schaubild sei K .

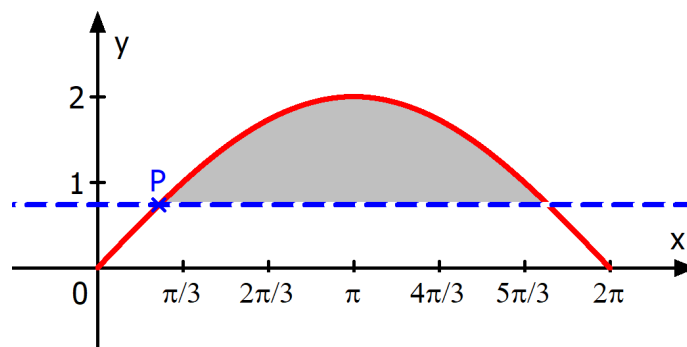
- Skizziere K im angegebenen Intervall.
Gib die Anzahl der gemeinsamen Punkte von K mit der Geraden $y = mx$ in Abhängigkeit von m an.
- Zwischen dem Schaubild K und der x -Achse wird ein Rechteck einbeschrieben, bei dem zwei Ecken auf der x -Achse und die beiden anderen Ecken auf K liegen. Die Fläche dieses Rechtecks soll maximal werden. Stelle die zugehörige Zielfunktion auf.

Teil 2:

Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = \frac{1}{a} \sin(ax) \text{ mit } x \in \mathbb{R}$$

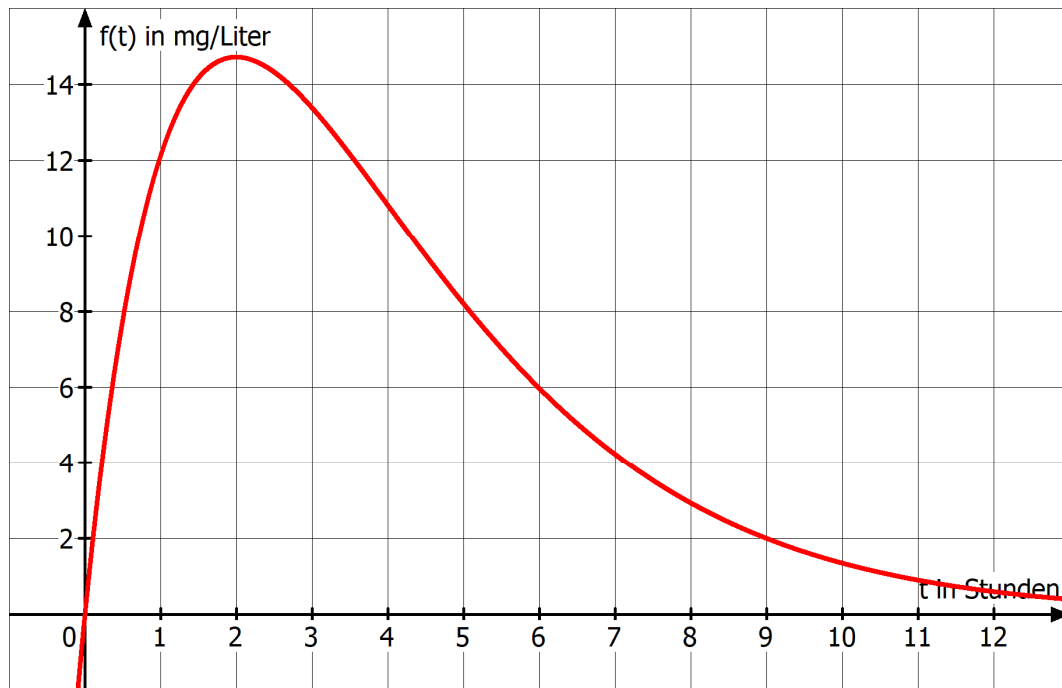
- Wie wirkt sich eine Veränderung des Parameters a auf das Schaubild von f_a aus? Berechne den Inhalt der Fläche, die das Schaubild von f_a mit der x -Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen einschließt.
- Das Schaubild von $f_{0,5}$ schließt im Bereich $0 \leq x \leq 2\pi$ mit der x -Achse eine Fläche ein. Eine Parallele zur x -Achse durch den Kurvenpunkt $P(z | f_{0,5}(z))$ halbiert diese Fläche.



Stelle eine Gleichung in Abhängigkeit von z auf, mit der der Punkt P berechnet werden kann.

Aufgabe 5: (abgewandelte Abituraufgabe 2006)

Durch $f(t) = 20t \cdot e^{-0,5t}$ wird die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten beschrieben. Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und $f(t)$ in $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ gemessen.



- a) Nach welcher Zeit erreicht die Konzentration ihren höchsten Wert?
Wie groß ist dieser höchste Wert?
Weise rechnerisch nach, dass die Konzentration nach dem Erreichen des höchsten Werts ständig abnimmt.
- Gegeben ist die Gleichung $f(u) - f(u + 2) = 5$.
Wie lautet die Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf diese Gleichung führt?
- b) Das Schaubild von f besitzt eine Wendestelle.
Bestimme rechnerisch die Wendestelle und interpretiere die Bedeutung der Wendestelle im Sachzusammenhang.
Wie groß ist die momentane Änderungsrate der Konzentration an der Stelle $t = 4$?
Ab dem Zeitpunkt $t = 4$ wird die Konzentration des Medikaments nun durch die Tangente an das Schaubild von f an der Stelle $t = 4$ beschrieben.
Bestimme damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut ist.

- c) Anstelle der Näherung aus Teilaufgabe b) wird nun wieder die Beschreibung der Konzentration durch f verwendet.
Vier Stunden nach der ersten Einnahme wird das Medikament in der gleichen Dosierung erneut eingenommen. Es wird angenommen, dass sich dabei die Konzentration im Blut des Patienten addiert.
Gib die Gleichung der Funktion $g(t)$ für $t \geq 4$ an, die die Konzentration des Medikaments zum Zeitpunkt t beschreibt.
- d) Das Medikament wird nun in seiner Zusammensetzung verändert.
Die Konzentration des Medikaments im Blut wird durch $g(t) = at \cdot e^{-bt}$ mit $a > 0$ und $b > 0$ beschrieben.
Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und $g(t)$ in $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ gemessen.
Bestimme die Konstanten a und b , wenn die Konzentration vier Stunden nach der Einnahme ihren größten Wert $10 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$ erreicht.

Aufgabe 6: (abgewandelte Abituraufgabe 2007)

Die Herstellungskosten eines neuen Rheumamittels werden durch eine Funktion f mit

$$f(x) = a + \frac{b}{x+5} \quad \text{mit } x \geq 0 \quad \text{modellhaft kalkuliert}$$

Hierbei gibt $f(x)$ die Kosten in 10.000 Euro für die x -te Produktionseinheit an, wobei die Einheiten nacheinander produziert werden.

Die fünfte Produktionseinheit kostet in der Herstellung 950.000 Euro, die zwanzigste Produktionseinheit kostet nur noch 560.000 Euro.

a) Bestimme a und b .

Weise nach, dass die Herstellungskosten für eine Produktionseinheit im Laufe der Zeit sinken.

Ab der wievielten Produktionseinheit sind die Herstellungskosten für eine Produktionseinheit geringer als 400.000 Euro?

Mit welchen Herstellungskosten für eine Produktionseinheit muss man langfristig rechnen?

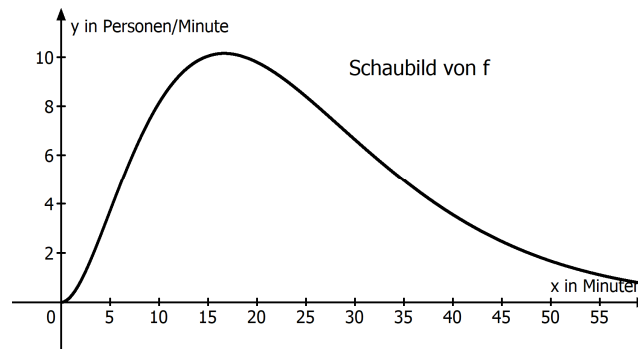
b) Ab der wievielten Produktionseinheit unterscheiden sich die Herstellungskosten von zwei aufeinander folgenden Produktionseinheiten um 10.000 Euro?

Jede Produktionseinheit besteht aus 10.000 Packungen.

Wie hoch muss der Verkaufspreis für eine Packung sein, damit die Einnahmen aus den ersten 100 verkauften Produktionseinheiten ihren Herstellungskosten entsprechen?

Aufgabe 7: (abgewandelte Abituraufgabe 2007)

Die momentane Ankunftsrate an einem Kino – also die Anzahl der ankommenden Personen pro Minute – soll modellhaft beschrieben werden durch die Funktion f mit $f(x) = 0,27 \cdot x^2 \cdot e^{-0,12x}$.



Dabei ist x die Zeit in Minuten seit 19.00 Uhr und $f(x)$ die Anzahl der ankommenden Personen pro Minute.

Vor 19.00 Uhr befinden sich noch keine Besucher am Kartenschalter.

- a) Um welche Uhrzeit ist die momentane Ankunftsrate maximal?
Wie groß ist die maximale Ankunftsrate?
- b) Zeige, dass die Anzahl der insgesamt ankommenden Personen durch die Funktion $g(x) = 312,5 - (2,25x^2 + 37,5x + 312,5) \cdot e^{-0,12x}$ (x in Minuten seit 19 Uhr) beschrieben wird.
Gib die waagrechte Asymptote der Funktion g an und interpretiere das Ergebnis im Sachzusammenhang.

- c) Um 19.20 Uhr öffnet der Kartenschalter des Kinos. Pro Minute können durchschnittlich für 6 Personen Karten ausgegeben werden.
Mit welcher Wartezeit muss eine Person rechnen, die um 19.20 Uhr zum Kino kommt?

Gib die Gleichung einer Funktion $w(x)$ mit $x \geq 20$ an, die die Anzahl der Personen in der Warteschlange x Minuten nach 19 Uhr beschreibt.

- d) Durch eine Verzögerung öffnet der Kartenschalter erst um 19.50 Uhr. Wie viele Personen müssen jetzt mindestens pro Minute am Schalter abgefertigt werden, damit die Warteschlange um 20.30 Uhr abgebaut ist?

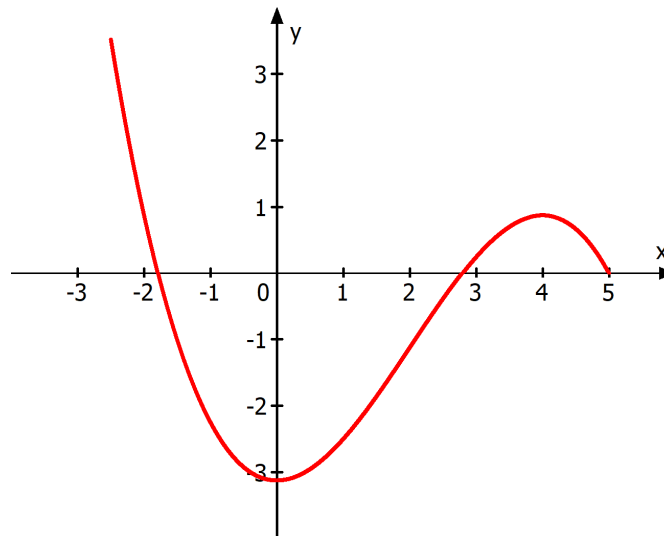
Aufgabe 8: (abgewandelte Abituraufgabe 2008)

Ein Tal in den Bergen wird nach Westen von einer steilen Felswand, nach Osten von einem flachen Höhenzug begrenzt.

Der Querschnitt des Geländes wird beschrieben durch das Schaubild der Funktion f mit

$$f(x) = -0,125x^3 + 0,75x^2 - 3,125 \quad \text{im Bereich } -2,5 \leq x \leq 5,$$

dabei weist die positive x -Achse nach Osten (1 LE entspricht 100 m).



Die Funktion f besitzt die Nullstellen $x_1 \approx -1,8$ und $x_2 \approx 2,8$ und $x_3 = 5$

- a) Berechne die Stelle, an der die östliche Talseite am steilsten ist, und dann die Stelle, an der die westliche Talseite gleich steil ist.
Quer zum Tal befindet sich in West-Ost-Richtung eine Staumauer. Vom tiefsten Punkt des Tals aus gemessen ist sie 312,5 m hoch.
Gib die Breite der Staumauer an ihrer Oberkante an.
Bevor das Wasser aufgestaut wird, muss die dem See zugewandte Seite der Staumauer versiegelt werden. Bestimme den Inhalt dieser Fläche.
- b) In der Talsohle befindet sich ein Dorf, das bereits nachmittags im Schatten liegt. Nach dem Vorbild des italienischen Ortes Viganella soll auf dem höchsten Punkt des Höhenzugs östlich des Dorfes ein Gerüst mit einem drehbaren Spiegel zur Reflexion von Sonnenlicht aufgestellt werden. Auch hier wird der Querschnitt des Geländes durch das Schaubild der Funktion f beschrieben.
Bestimme die Mindesthöhe dieses Gerüsts, bei der das Sonnenlicht den tiefsten Punkt des Geländequerschnitts erreichen kann.
Wie hoch müsste das Gerüst werden, damit der gesamte Geländequerschnitt zwischen Dorf und Gerüst beleuchtet werden kann?

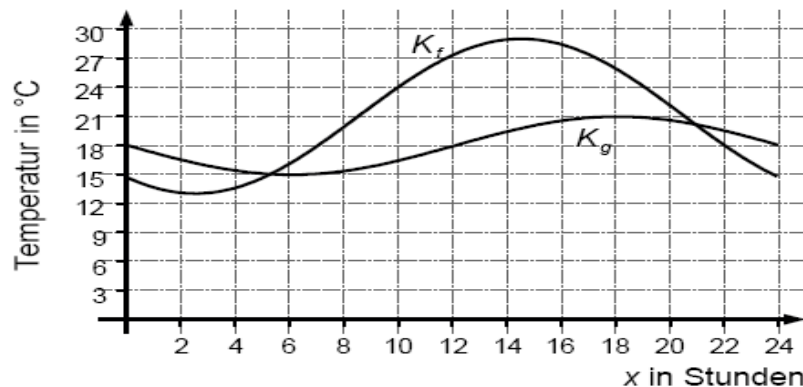
Aufgabe 9: (abgewandelte Abituraufgabe 2008)

Der Temperaturverlauf außerhalb eines Hauses während eines Tages kann durch eine Funktion f mit

$$f(x) = 8 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x - 8,5)\right] + 21 \text{ mit } 0 \leq x \leq 24$$

beschrieben werden (x in Stunden seit 0 Uhr, $f(x)$ in $^{\circ}\text{C}$).

Die Abbildung zeigt das Schaubild K_f von f sowie den innerhalb des Hauses gemessenen Temperaturverlauf K_g .



- Gib an, zu welchen Uhrzeiten die Außentemperatur minimal bzw. maximal ist. Wann ist der Temperaturanstieg im Freien am größten? Bestimme die durchschnittliche Temperatur im Freien zwischen 6 und 18 Uhr.
- Bestimme einen Term der Funktion g , der den Temperaturverlauf K_g wiedergibt. Beschreibe, wie K_g aus dem Schaubild der Sinusfunktion mit $y = \sin(x)$ entsteht. Gib eine mögliche Ursache für die zeitliche Verschiebung der beiden Temperaturverläufe K_f und K_g an.
- Für den folgenden Tag wird vermutet, dass der Temperaturverlauf außerhalb des Hauses durch eine Funktion h mit

$$h(x) = 10 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x - 8,5)\right] + ax + b \text{ mit } 24 \leq x \leq 48$$

beschrieben werden kann (x in Stunden, $h(x)$ in $^{\circ}\text{C}$).

Dabei stimmen zum Zeitpunkt $x = 24$ sowohl die durch f und h beschriebenen Temperaturen als auch ihre momentanen Änderungsraten überein.

Berechne a und b .

Begründe, warum die durchschnittliche Außentemperatur am zweiten Tag nur durch den Term $ax+b$ bestimmt wird.

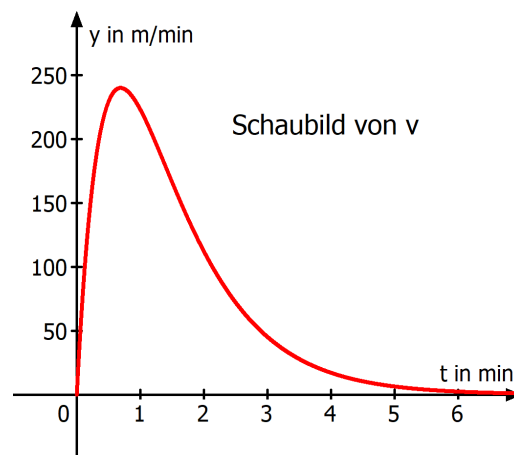
Aufgabe 10: (abgewandelte Abituraufgabe 2010)

Ein Segelboot gleitet mit der konstanten Geschwindigkeit $160 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ an einem ruhenden Motorboot vorbei. Das Motorboot nimmt zu diesem Zeitpunkt Fahrt auf und fährt dem Segelboot hinterher.

Die Geschwindigkeit $v(t)$ des Motorbootes ist für $t > 0$ stets positiv und wird durch

$$v(t) = 960 \cdot e^{-t} - 960 \cdot e^{-2t} ; t \geq 0$$

beschrieben (Zeit t in min seit der Vorbeifahrt, Geschwindigkeit $v(t)$ in $\frac{\text{m}}{\text{min}}$).



- a) Berechne die höchste Geschwindigkeit des Motorbootes.
Wann nimmt die Geschwindigkeit des Motorbootes am stärksten ab?
Welche mittlere Geschwindigkeit hat das Motorboot in den ersten fünf Minuten?
Wie lange fährt das Motorboot schneller als das Segelboot?
- b) Wie weit ist das Motorboot nach zwei Minuten gefahren?
Bestimme einen Term der Funktion, die den vom Motorboot zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
Legt das Motorboot nach diesem Modell mehr als 500 m zurück?
Weise rechnerisch nach, dass das Motorboot das Segelboot nach ca. $t = 0,58$ Minuten überholt.
- c) Zum Zeitpunkt $t_0 = 2,55$ holt das Segelboot das Motorboot wieder ein.
Beide Boote verringern ab diesem Moment ihre Geschwindigkeit.
Ab dem Zeitpunkt t_0 wird die Geschwindigkeit des Motorbootes durch die Tangente an das Schaubild der Funktion v an der Stelle t_0 beschrieben.
Wann kommt das Motorboot zum Stillstand?

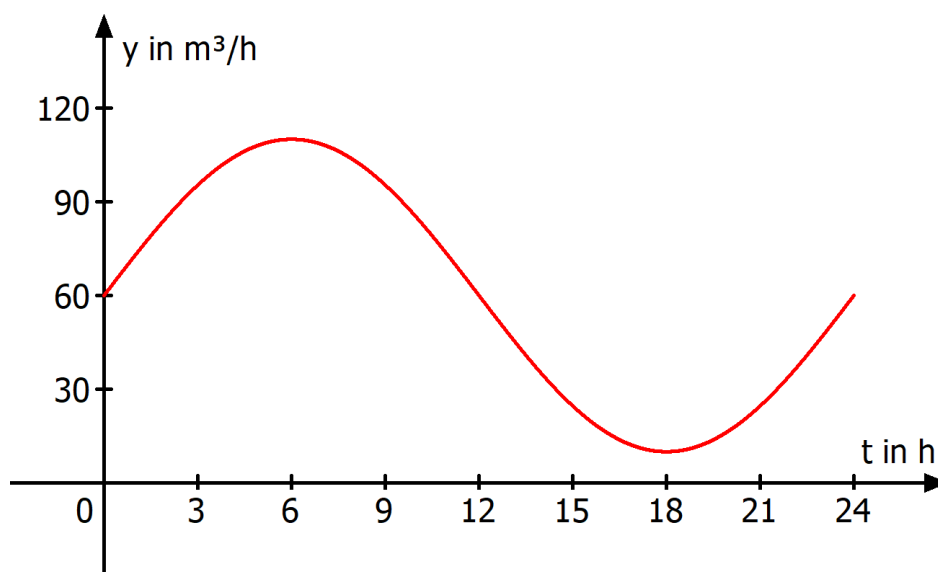
Die Geschwindigkeit des Segelbootes kann ab dem Zeitpunkt t_0 ebenfalls durch eine Gerade beschrieben werden. Das Segelboot kommt am gleichen Ort wie das Motorboot zum Stillstand. Wann kommt das Segelboot zum Stillstand?

Aufgabe 11: (abgewandelte Abituraufgabe 2011)**Aufgabe 11.1:**

Ein Staubecken wird zur Zeit der Schneeschmelze gefüllt. Da die Schneeschmelze temperaturabhängig ist, kann die momentane Zuflussrate des Wassers durch die Funktion w mit

$$w(t) = 50 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 60 \quad ; \quad 0 \leq t \leq 24$$

beschrieben werden (t in Stunden seit Beobachtungsbeginn, $w(t)$ in $\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$)



- a) In welchem Zeitraum ist die momentane Zuflussrate größer als $100 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$?
Zu welchem Zeitpunkt nimmt die momentane Zuflussrate am stärksten ab?
- b) Zu Beobachtungsbeginn enthält das Staubecken 5000 m^3 Wasser.
Wie viel Wasser enthält es nach 24 Stunden?
Bestimme einen integralfreien Funktionsterm für die zum Zeitpunkt t im Staubecken enthaltene Wassermenge.

Aufgabe 11.2:

Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = a \cdot \sin(ax) + a ; x \in \mathbb{R}$$

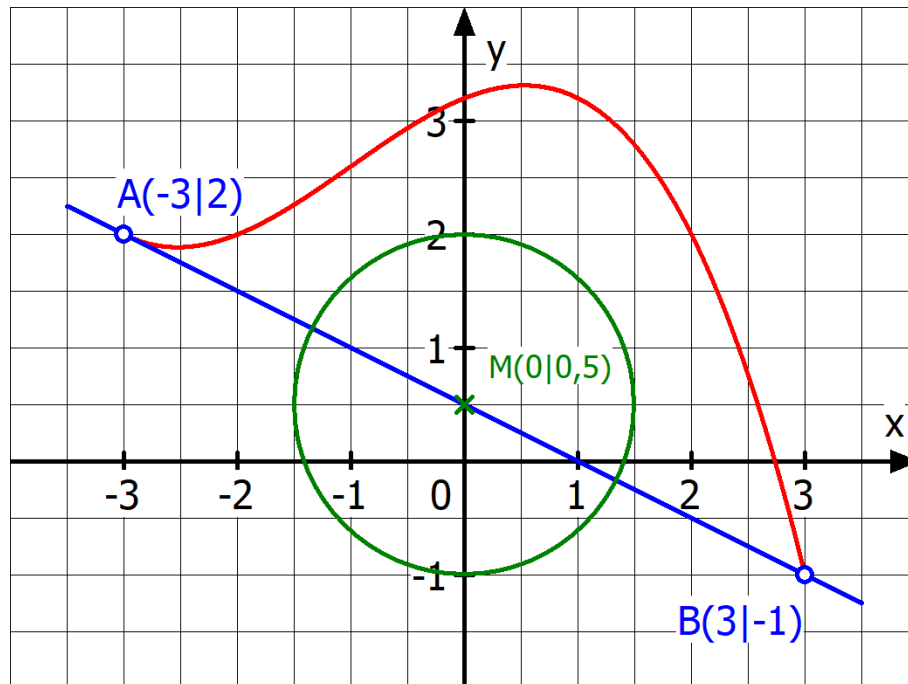
f_a hat das Schaubild K_a und die Periode p_a .

- a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunktes H_a von K_a für $0 \leq x \leq p_a$.
Ermittle eine Gleichung der Kurve, auf der alle diese Hochpunkte H_a liegen.
- b) Gib in Abhängigkeit von a die Koordinaten des Wendepunkts W_a von K_a an,
der den kleinsten positiven x -Wert hat.
Die Tangente in W_a an K_a schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein.
Zeige, dass der Inhalt dieser Fläche unabhängig von a ist.

Aufgabe 12: (abgewandelte Abituraufgabe 2012)

Die Abbildung zeigt den Verlauf einer Umgehungsstraße zur Entlastung der Ortsdurchfahrt AB einer Gemeinde. Das Gemeindegebiet ist kreisförmig mit dem Mittelpunkt M und dem Radius 1,5 km. Die Umgehungsstraße verläuft durch die Punkte A und B und wird beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(x) = -0,1x^3 - 0,3x^2 + 0,4x + 3,2. \quad 1 \text{ LE entspricht } 1 \text{ km.}$$

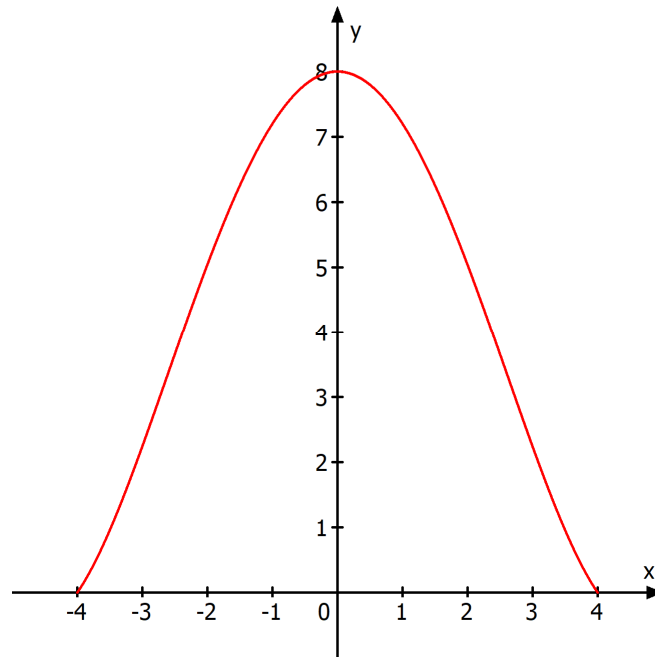


- Welche Koordinaten hat der nördlichste Punkt der Umgehungsstraße?
Wie weit ist dieser Punkt vom Ortsmittelpunkt M entfernt?
Die Umgehungsstraße beschreibt eine Linkskurve und eine Rechtskurve.
Bestimme den Punkt, in dem diese beiden Abschnitte ineinander übergehen.
Zeige, dass die Umgehungsstraße im Punkt A ohne Knick in die Ortsdurchfahrt einmündet.
- Zur Bewertung von Grundstücken wird die Fläche zwischen der Ortsdurchfahrt und der Umgehungsstraße vermessen.
Wie viel Prozent dieser Fläche liegt außerhalb des Gemeindegebiets?
- Im Punkt P(1,5|3) befindet sich eine Windkraftanlage.
Ein Fahrzeug fährt von B aus auf der Umgehungsstraße.
Zeige, dass der Fahrer die Windkraftanlage im Punkt Z(2|2) genau in Fahrtrichtung vor sich sieht.
- In welchem Punkt der Umgehungsstraße fährt ein Fahrzeug parallel zur Ortsdurchfahrt AB?
Welchen Abstand hat ein Fahrzeug auf der Umgehungsstraße höchstens von der Ortsdurchfahrt?

Aufgabe 13: (abgewandelte Abituraufgabe 2013)**Aufgabe 13-1:**

Der Querschnitt eines 50 Meter langen Bergstollens wird beschrieben durch die x-Achse und den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = 0,02x^4 - 0,82x^2 + 8 \quad ; \quad -4 \leq x \leq 4 \quad (x \text{ und } f(x) \text{ in Meter}).$$



- a) An welchen Stellen verlaufen die Wände des Stollens am steilsten?
Welchen Winkel schließen die Wände an diesen Stellen mit der Horizontalen ein?
- b) Nach einem Wassereinbruch steht das Wasser im Stollen 1,7 m hoch.
Wie viel Wasser befindet sich in dem Stollen?
- c) Im Stollen soll in 6 m Höhe eine punktförmige Lampe aufgehängt werden, dass sie von den Stollenwänden gleich weit entfernt ist.
Beschreibe ein Verfahren, mit dem rechnerisch ermittelt werden kann, wie groß der Mindestabstand der Lampe von den Stollenwänden ist.

Aufgabe 13-2:

Für jedes $t \neq 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = (x-1) \cdot \left(1 - \frac{1}{t} \cdot e^x\right)$.

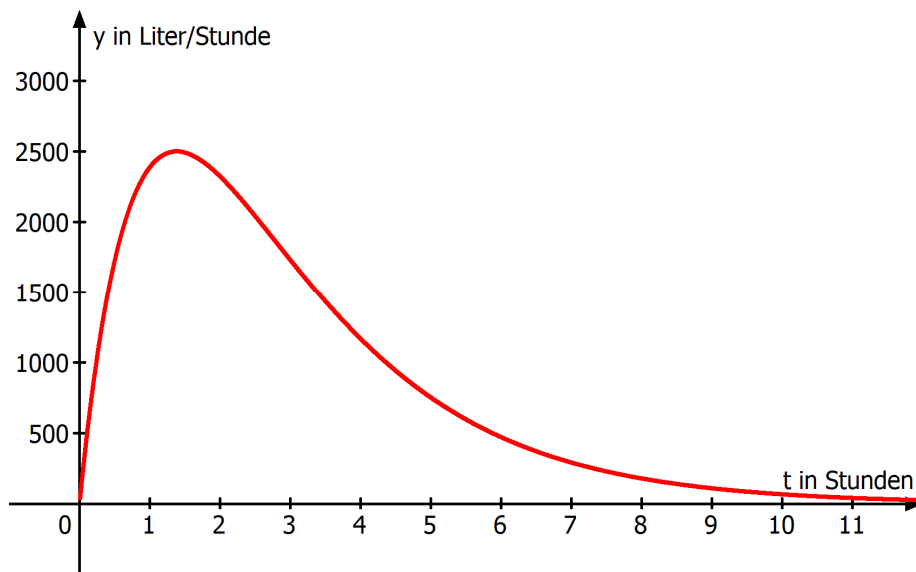
Für welche Werte von t besitzt f_t mehr als eine Nullstelle?

Aufgabe 14: (abgewandelte Abituraufgabe 2013)**Aufgabe 14-1:**

Ein zunächst leerer Wassertank einer Gärtnerei wird von Regenwasser gespeist. Nach Beginn eines Regens wird die momentane Zuflussrate des Wassers durch die Funktion r mit

$$r(t) = 10000 \cdot (e^{-0,5t} - e^{-t}) \quad ; \quad 0 \leq t \leq 12$$

beschrieben (t in Stunden seit Regenbeginn, $r(t)$ in Liter pro Stunde).



- a) Bestimme die maximale Zuflussrate.
Zu welchem Zeitpunkt nimmt die momentane Zuflussrate am stärksten ab?
- b) Wie viel Wasser befinden sich drei Stunden nach Regenbeginn im Tank?
- c) Zur Bewässerung von Gewächshäusern wird nach 3 Stunden begonnen, Wasser aus dem Tank zu entnehmen. Daher wird die momentane Änderungsrate des Wasservolumens im Tank ab diesem Zeitpunkt durch die Funktion

$$w(t) = r(t) - 400; \quad 3 \leq t \leq 12$$

beschrieben (t in Stunden seit Regenbeginn, $w(t)$ in Liter pro Stunde).
Wie viel Wasser wird in den ersten 12 Stunden nach Regenbeginn entnommen?
Ab welchem Zeitpunkt nimmt die Wassermenge im Tank ab?
Bestimme die maximale Wassermenge im Tank.

Aufgabe 14-2:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin(\pi \cdot x)$ für $0 \leq x \leq 1$

Der Graph von f begrenzt mit der x -Achse eine Fläche mit Inhalt A .

Berechne A exakt.

Der Graph einer ganzrationalen Funktion g zweiten Grades schneidet die x -Achse bei $x = 0$ und $x = 1$ und schließt mit der x -Achse eine Fläche ein, deren Inhalt halb so groß wie A ist.

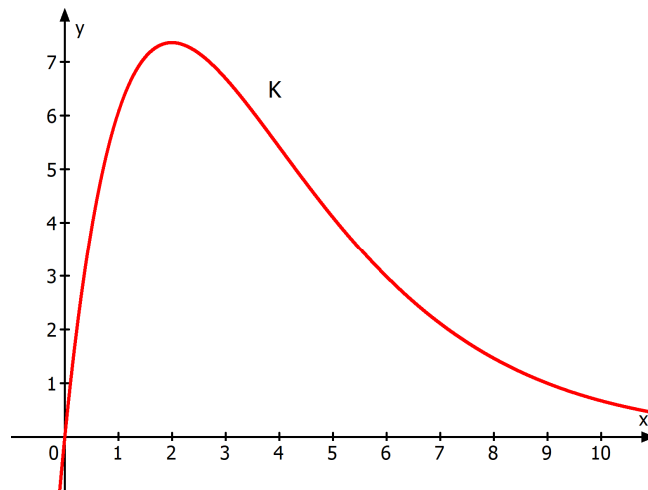
Ermittle eine Funktionsgleichung von g .

Aufgabe 15: (abgewandelte Abituraufgabe 2014)**Aufgabe 15-1:**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 10x \cdot e^{-0,5x}$.

Ihr Graph sei K .

- a) K besitzt einen Hochpunkt und einen Wendepunkt.
Berechne die Koordinaten des Hochpunktes und des Wendepunktes.
Wie lautet die Gleichung der waagrechten Asymptote von K ?



- b) Für jedes $u > 0$ sind $O(0|0)$, $P(u|0)$ und $Q(u|f(u))$ die Eckpunkte eines Dreiecks.
Es gibt einen Wert von u , so dass das Dreieck einen maximalen Flächeninhalt annimmt. Berechne den Wert von u .
Hinweis: Auf die Randwertuntersuchung kann verzichtet werden.

- c) Gegeben ist die Gleichung $\frac{1}{3} \cdot \int_u^{u+3} f(x) dx = 2,2$.

Wie lautet eine mögliche Fragestellung, die zu dieser Gleichung führt?

Aufgabe 15-2:

Gegeben ist für jedes $t > 0$ eine Funktion f_t durch $f_t(x) = \frac{1}{3}x^3 - t^2x$.

Berechne die Extrempunkte der Funktionenschar.

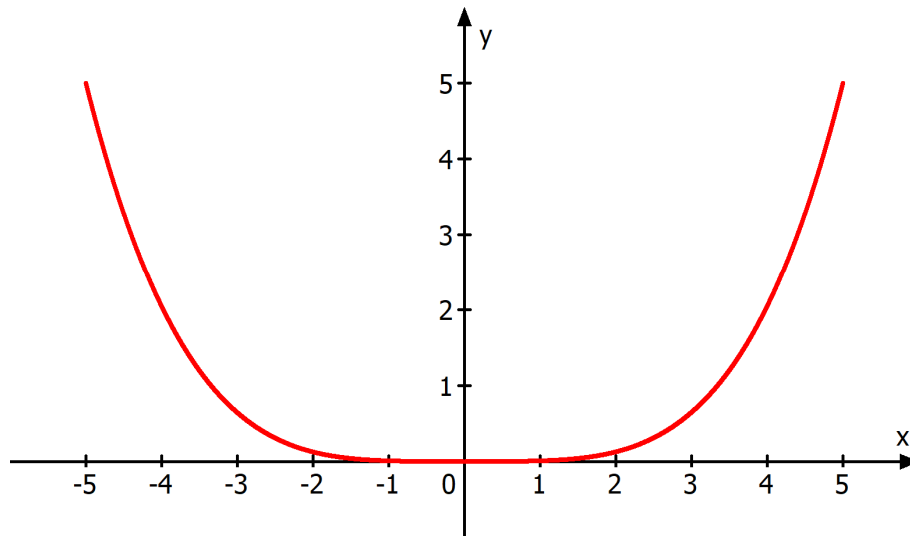
Gib die Ortskurve der Hochpunkte der Schar an.

Gibt es Punkte auf der Ortskurve, auf denen kein Hochpunkt der Schar liegt?

Aufgabe 16: (abgewandelte Abituraufgabe 2014 und 2015)**Aufgabe 16-1:**

Der Laderaum eines Lastkahns ist 50 m lang. Sein Querschnitt ist auf der gesamten Länge gleich und wird modellhaft beschrieben durch den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{125}x^4 ; \quad -5 \leq x \leq 5 \quad (x \text{ und } f(x) \text{ in Meter})$$



- a) Wie tief ist der Laderaum in der Mitte?
Wie breit ist er in 3 m Höhe?
In welchem Bereich hat der Boden des Laderaums eine Neigung unter 5%?
Berechne das Volumen des Laderaums.
- b) Zur Wartung steht der Lastkahn an Land auf einer ebenen Plattform. Dort wird er stabilisiert durch gerade Stützen, die orthogonal zur Außenwand des Laderaums angebracht sind. Betrachtet werden zwei einander gegenüberliegende Stützen, deren Befestigungspunkte im Modell durch die Punkte $P_1(-4 | f(-4))$ und $P_2(4 | f(4))$ beschrieben werden.
In welchem Abstand voneinander enden diese Stützen auf der Plattform?
- c) Der Laderaum kann durch eine horizontale Zwischendecke der Länge 50 m in zwei Teilräume geteilt werden. Das Volumen des unteren Teilraums beträgt 500 m^3 . Berechne die Breite der Zwischendecke.

Aufgabe 16-2:

Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = a \cdot \cos(x) - a^2 \quad ; \quad -\pi < x < \pi$$

Der Graph von f_a ist G_a .

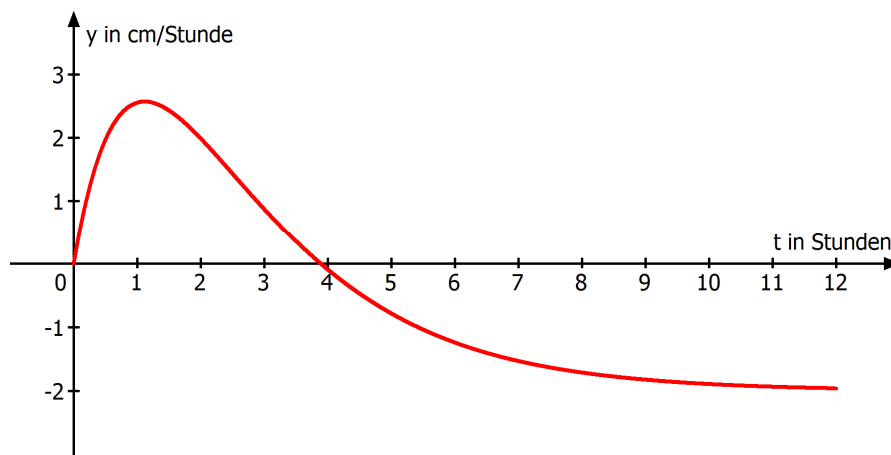
- a) G_a besitzt einen Extrempunkt. Bestimme dessen Koordinaten.
- b) Durch welche Punkte der y-Achse verläuft kein Graph G_a ?

Aufgabe 17: (abgewandelte Abituraufgabe 2016)**Aufgabe 17-1:**

In einem Skigebiet beträgt die Schneehöhe um 10.00 Uhr an einer Messstelle 150 cm. Die momentane Änderungsrate dieser Schneehöhe wird beschrieben durch die Funktion s mit

$$s(t) = 16e^{-0,5t} - 14e^{-t} - 2 \quad ; \quad 0 \leq t \leq 12$$

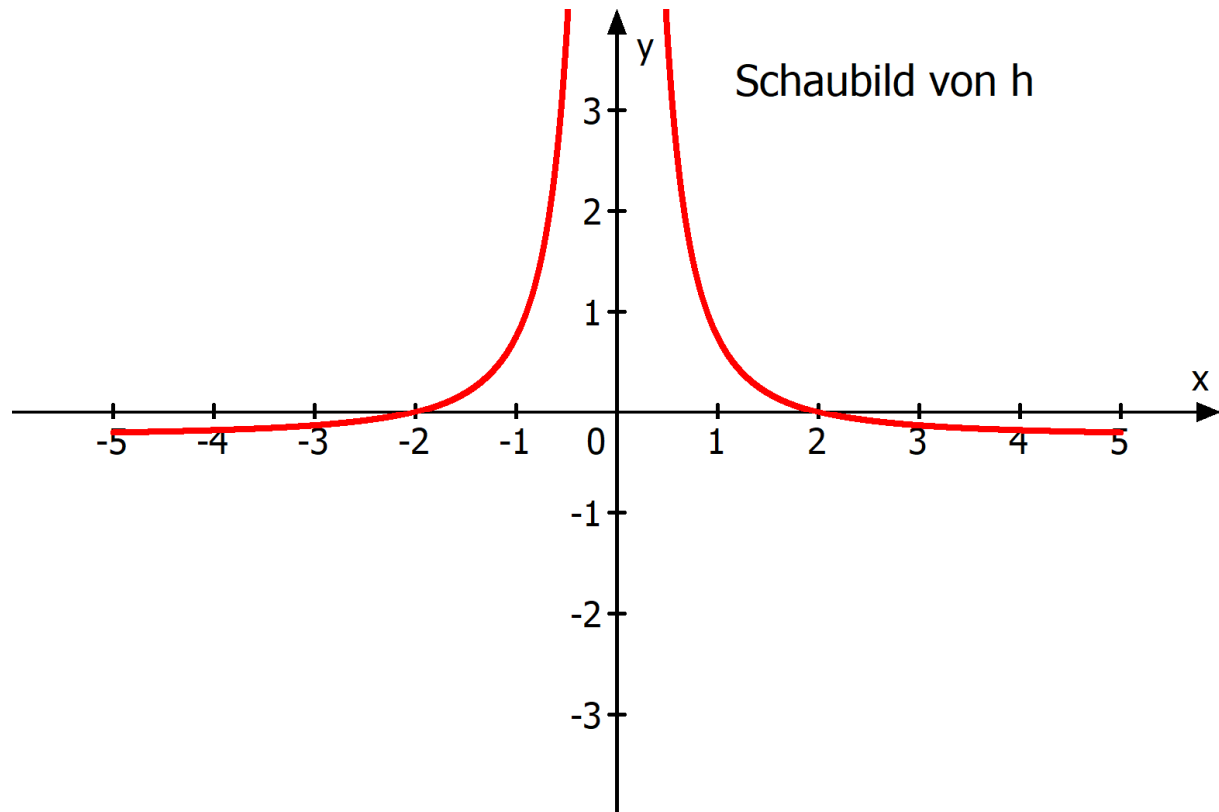
(t in Stunden nach 10.00 Uhr, $s(t)$ in Zentimeter pro Stunde).



- a) Bestimme die maximale momentane Änderungsrate der Schneehöhe.
Ermittle den Zeitraum, in dem die momentane Änderungsrate der Schneehöhe größer als 2 cm pro Stunde ist.
Wie hoch liegt der Schnee um 12.00 Uhr?
- b) Bestimme einen integralfreien Funktionsterm, der die Schneehöhe zum Zeitpunkt t beschreibt.
- c) Um 12.30 Uhr werden nun Schneekanonen in Betrieb genommen.
Sie liefern konstant so viel Schnee, dass sich die momentane Änderungsrate der Schneehöhe an der Messstelle um a cm pro Stunde erhöht.
Berechne den Wert von a , damit um 18.00 Uhr die Schneehöhe 160cm beträgt.

Aufgabe 17-2:

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}$, deren Graph symmetrisch zur y -Achse ist.



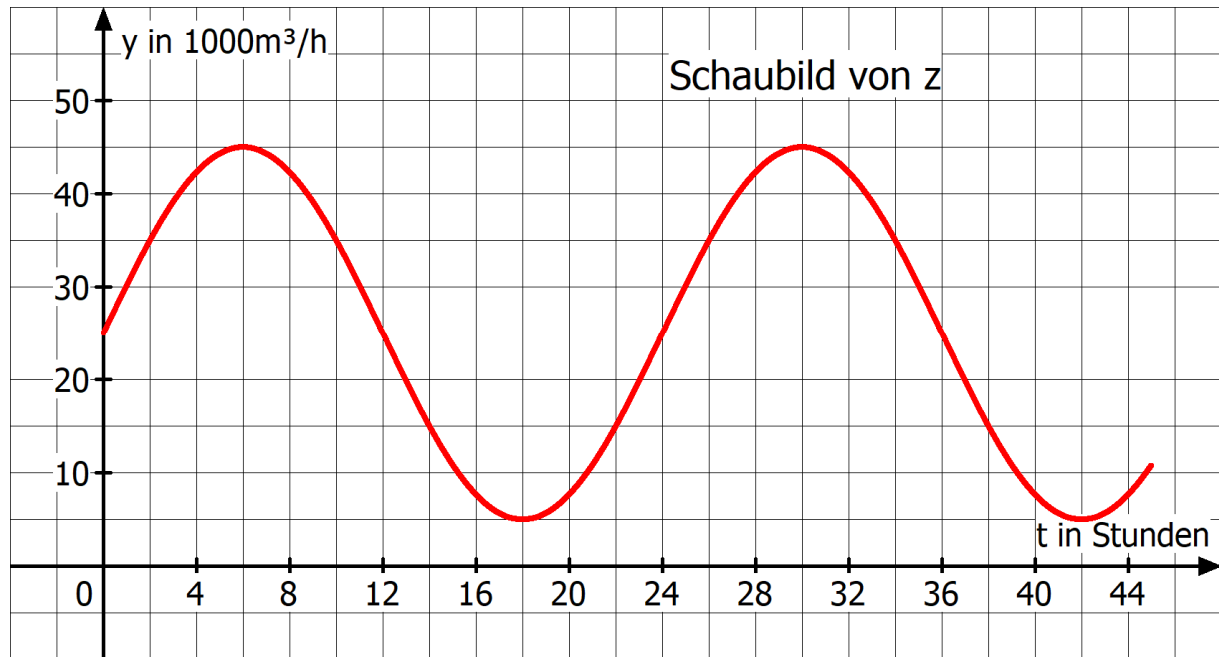
Es gibt einen Kreis, der den Graphen von h in dessen Schnittpunkten mit der x -Achse berührt.

Berechne die Koordinaten des Mittelpunkts des Kreises.

Aufgabe 18: (abgewandelte Abituraufgabe 2017)**Aufgabe 18-1:**

An einem Stausee wird der Zu- und Abfluss künstlich geregelt. Dabei wird die momentane Zuflussrate beschrieben durch die Funktion z mit

$$z(t) = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 25; \quad t \geq 0$$



Die konstante Abflussrate wird beschrieben durch die Funktion a mit

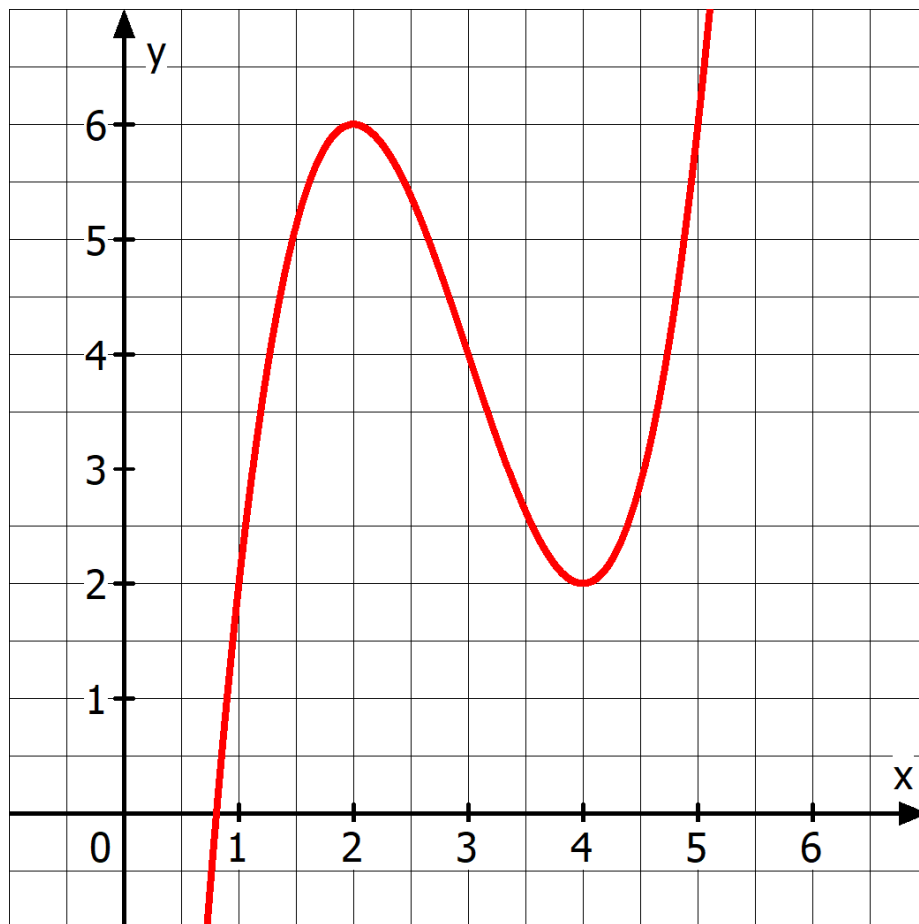
$$a(t) = 19; \quad t \geq 0$$

(t in Stunden seit Beobachtungsbeginn, $z(t)$ und $a(t)$ in $1000 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$)

- a) Zunächst werden die ersten 24 Stunden nach Beobachtungsbeginn betrachtet.
Bestimme die minimale momentane Zuflussrate.
In welchem Zeitraum nimmt die Wassermenge im Stausee ab?
Bestimme die maximale momentane Änderungsrate der Wassermenge.
- b) Zu Beobachtungsbeginn befinden sich $2\,500\,000 \text{ m}^3$ Wasser im See.
Bestimme die Wassermenge im Stausee 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn.
Zeige, dass die Wassermenge in jedem 24-Stunden-Zeitraum exakt um $144\,000 \text{ m}^3$ zunimmt.
Welchen Wert müsste die konstante Abflussrate haben, damit nach Ablauf von 14 Tagen die Wassermenge im Stausee $4\,180\,000 \text{ m}^3$ betragen würde?

Aufgabe 18-2:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 14$.



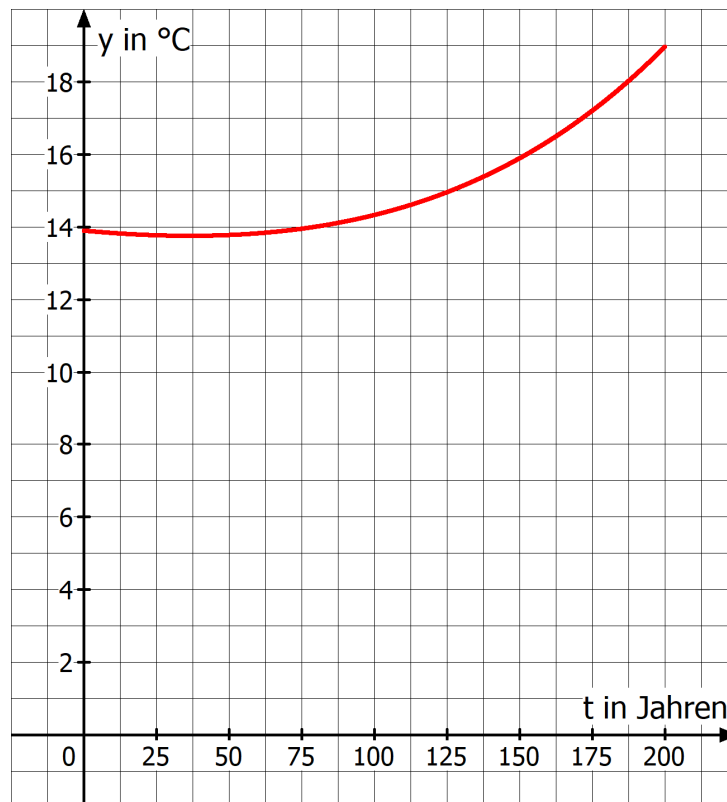
- a) Die Gerade g durch den Hochpunkt H und den Tiefpunkt T des Graphen von f schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten P und Q :
Bestimme den prozentualen Anteil der Strecke HT an der Strecke PQ .
- b) Begründe, dass die Steigung des Graphen von f keine Werte kleiner als -3 annehmen kann.
- c) Gegeben ist die Gleichung $f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$.
Gib die Anzahl der Lösungen dieser Gleichung in Abhängigkeit von a an.

Aufgabe 19: (abgewandelte Abituraufgabe 2018)**Aufgabe 19-1:**

Ein Klimaforscher beschreibt die Entwicklung der globalen Durchschnittstemperatur modellhaft durch die Funktion f mit

$$f(t) = 2,8e^{0,008t} - 0,03t + 11,1 \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 200$$

Dabei gibt t die Zeit in Jahren seit Beginn des Jahres 1900 und $f(t)$ die globale Durchschnittstemperatur in Grad Celsius an.



Bearbeite die folgenden Teilaufgaben anhand dieses Modells.

- a) Gib die globale Durchschnittstemperatur zu Beginn des Jahres 1900 an.
Berechne die niedrigste globale Durchschnittstemperatur seit 1900.
Berechne die momentane Änderungsrate der globalen Durchschnittstemperatur zu Beginn des Jahres 2000.
Bestimme den Mittelwert der globalen Durchschnittstemperatur im durch die Modellierung beschriebenen Zeitraum.

- b) Formuliere eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $f(t+10) - f(t) = 0,5$ führt.

Nachdem die globale Durchschnittstemperatur ihren niedrigsten Wert erreicht hat, steigt sie immer weiter an.

Zeige, dass dieser Anstieg immer schneller verläuft.

- c) Es werden Klimaschutzmaßnahmen geplant. Greifen diese zum Zeitpunkt t_0 , so bleibt die momentane Änderungsrate der globalen Durchschnittstemperatur konstant bei dem Wert, der durch das Modell des Klimaforschers für t_0 vorausgesagt wird.
Zeige, dass zum Zeitpunkt $t_0 \approx 122$ die Maßnahmen greifen müssen, damit die globale Durchschnittstemperatur $15,7^\circ\text{C}$ bis zum Beginn des Jahres 2050 nicht überschreiten wird.

Aufgabe 19-2:

Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion f_a mit $f_a(x) = -ax^4 + 4ax^2$ gegeben.

- a) Begründe, dass der Graph von f_a achsensymmetrisch zur y-Achse ist.
Zeige, dass die Nullstellen der Funktion f_a unabhängig von a sind.
- b) Sowohl der Graph der Funktion g mit $g(x) = \frac{32}{15}\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ als auch der Graph von f_a schließen für $0 \leq x \leq 2$ eine Fläche mit der x-Achse ein.
Bestimme a so, dass beide Flächen den gleichen Inhalt haben.

Aufgabe 19-3:

Für jede reelle Zahl k ist eine Funktion f_k mit $f_k(x) = k \cdot e^x - 2x \cdot e^x$ gegeben.

- a) Bestimme die Nullstelle von f_k .
- b) Zeige, dass f_{k+2} eine Stammfunktion von f_k ist.
Der Graph von f_2 schließt mit den positiven Koordinatenachsen eine Fläche ein.
Bestimme ihren Inhalt exakt.