

Hauptprüfung Abiturprüfung 2019

Baden-Württemberg

Wahlteil Analytische Geometrie B2

Hilfsmittel: GTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2019

Aufgabe B 2:

Die Punkte $A(6|6|0)$, $B(2|8|0)$ und $O(0|0|0)$ sind Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze $S(4|6|10)$. Die Ebene E enthält die Punkte A, B und $C(2|3|5)$.

- a) Stellen Sie die Pyramide in einem geeigneten Koordinatensystem dar.

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E .

(Teilergebnis: $E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 18$)

(3 VP)

- b) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig ist.

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide, die das Dreieck ABC als Grundfläche und den Punkt S als Spitze hat.

(4 VP)

- c) In einem Koordinatensystem, bei dem die x_1x_2 -Ebene den Erdboden beschreibt, stellt die Pyramide $ABOS$ ein Kunstwerk dar (Koordinatenangaben in m).

An der Stelle, die durch den Punkt $F(8|3|0)$ beschrieben wird, steht ein Mast senkrecht auf den Erdboden. Auf den Mast treffendes Sonnenlicht lässt sich durch parallele

Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ beschreiben.

Der Schattenpunkt der Mastspitze liegt auf der Kante des Kunstwerks, die durch die Strecke OS beschrieben wird.

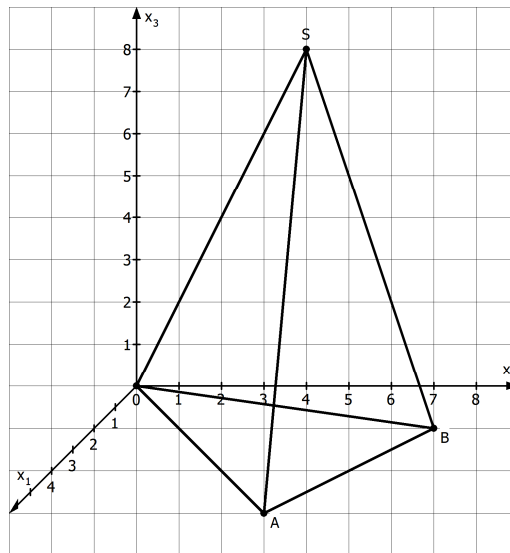
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Höhe des Masts rechnerisch bestimmen kann.

(3 VP)

Lösungen

Aufgabe B2:

a) Darstellung der Pyramide



Koordinatengleichung von E:

Parameterform von E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Normalenvektor von E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$ bzw. vereinfacht $\vec{n}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ansatz für die Koordinatengleichung: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = d$

Einsetzen des Punktes A(6|6|0) in E: $6 + 12 + 0 = 18 \Rightarrow d = 18$

Koordinatengleichung von E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 18$

b) Nachweis der Gleichschenkligkeit

Berechnung der Länge der Dreiecksseiten:

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overline{AB}| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} \quad \overline{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overline{AC}| = \sqrt{16 + 9 + 25} = \sqrt{50}$$

$$\overline{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overline{BC}| = \sqrt{0 + 25 + 25} = \sqrt{50}$$

Somit ist das Dreieck gleichschenkelig.

Volumen der Pyramide

Formel für das Pyramidenvolumen: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

G ist der Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks:

M ist der Mittelpunkt der Strecke AB: $M\left(\frac{6+2}{2} \mid \frac{6+8}{2} \mid \frac{0+0}{2}\right) \rightarrow M(4 \mid 7 \mid 0)$

Flächeninhalt des Dreiecks: $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{MC}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{45} = 15$

Die Höhe h der Pyramide entspricht dem Abstand des Punktes S von der Ebene E.

HNF von E: $\frac{x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 18}{3} = 0$

$d(S, E) = \left| \frac{4 + 12 + 20 - 18}{3} \right| = 6$

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 15 \cdot 6 = 30$ Volumeneinheiten

c) Verfahren

Zunächst stellt man eine Hilfsebene H auf, die als Spannvektor den Richtungsvektor $\vec{v}$ enthält sowie den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ des Mastes und durch den Punkt F verläuft.

$H: \vec{x} = \overline{OF} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Ebene H wird mit der Geraden g geschnitten, die durch die Punkte O und S verläuft:
g: $\vec{x} = r \cdot \overline{OS}$

Der Schnittpunkt von H und g sei M.

Nun schneidet man die Geraden h: $\vec{x} = \overline{OM} + r \cdot \vec{v}$ und k: $\vec{x} = \overline{OF} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

k ist die Gerade, in der der Mast liegt.

Der Schnittpunkt der Geraden h und k sei P.

Die x_3 -Koordinate des Punktes P stellt die Höhe des Mastes in Meter dar.