Hauptprüfung Abiturprüfung 2019

Baden-Württemberg

Wahlteil Analysis A2

Hilfsmittel: GTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2019

Aufgabe A 2.1

In einem Labor wird erforscht, wie sich Bakterien unter verschiedenen Bedingungen entwickeln. Betrachtet wird jeweils der Flächeninhalt der von den Bakterien eingenommenen Fläche.

Versuchsreihe 1

Bei ungehinderter Vermehrung wird der Flächeninhalt während der ersten zwölf Stunden beschrieben durch die Funktion f mit

$f(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t}$ (t in Stunden nach Beobachtungsbeginn, f(t) in mm²).

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt drei Stunden nach Beobachtungsbeginn.
Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem sich der Flächeninhalt im Vergleich zum Beobachtungsbeginn verdreifacht hat.
Berechnen Sie die momentane Änderungsrate des Flächeninhalts zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.

(3,5 VP)

b) Berechnen Sie $\frac{1}{4} \cdot \int_5^9 f(t)dt$
Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

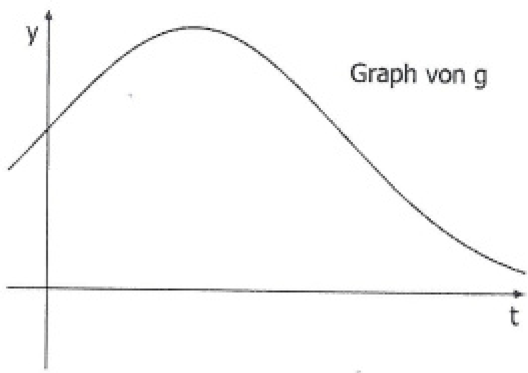
(3,5 VP)

Versuchsreihe 2

Wenn man einer Bakterienkultur ein Antibiotikum hinzugibt, dann wird der Flächeninhalt durch die Funktion g beschrieben mit

$g(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2}$ (t in Stunden nach Beobachtungsbeginn, g(t) in mm²)

Die Abbildung zeigt den Graphen von g.



c) Der Flächeninhalt nimmt zu einem bestimmten Zeitpunkt seinen größten Wert an.
Berechnen Sie diesen Wert.
Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Flächeninhalt wieder so groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

(5 VP)

d) Betrachtet wird die Funktion h mit $h(t) = g(t+10)$.
Für jede reelle Zahl t gilt: $h(-t) = h(t)$.
Erläutern Sie, welche geometrische Eigenschaft des Graphen von g damit begründet werden kann.

(2 VP)

Aufgabe A 2.2

Für jedes t > 0 ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = x^4 - 2tx^2 + 8t$.
Der Graph der Funktion f_t ist G_t.

a) Bestimmen Sie t so, dass der Punkt P(1|4) auf dem Graphen G_t liegt.

(1 VP)

b) Jeder Graph G_t hat an der Stelle $x = \sqrt{t}$ einen Tiefpunkt.
Berechnen Sie denjenigen Wert von t, für den dieser Tiefpunkt möglichst hoch liegt.

(2,5 VP)

c) Zeigen Sie, dass es genau zwei Punkte gibt, durch die sämtliche Graphen G_t verlaufen.

(2,5 VP)

Lösungen

Aufgabe A 2.1

a) Flächeninhalt 3 Stunden nach Beobachtungsbeginn

$f(3) = 20 \cdot e^{0,3} \approx 27$.
Nach 3 Stunden beträgt der Flächeninhalt ca. 27 mm².

Verdreifachung des Flächeninhalts

Bei Beobachtungsbeginn beträgt der Flächeninhalt $f(0) = 20$ mm²

Gesucht ist der Zeitpunkt, wann der Flächeninhalt 60 mm² beträgt:

$60 = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t} \Rightarrow t = \frac{1}{0,1} \cdot \ln(3) \approx 10,99$ Stunden

Etwa 11 Stunden nach Beobachtungsbeginn hat sich der Flächeninhalt verdreifacht.

Momentane Änderungsrate nach zwei Stunden

Es gilt $f'(t) = 20 \cdot 0,1 \cdot e^{0,1t} = 2 \cdot e^{0,1t}$

$f'(2) = 2 \cdot e^{0,2} \approx 2,44$

Die momentane Änderungsrate des Flächeninhalts beträgt ca. 2,44 mm² pro Stunde.

b) $\frac{1}{4} \cdot \int_5^9 f(t)dt = \frac{1}{4} \cdot \left[20 \cdot \frac{1}{0,1} e^{0,1t}\right]_5^9 = \frac{1}{4} \cdot \left[200 \cdot e^{0,1t}\right]_5^9 = \frac{1}{4} \cdot \left(200e^{0,9} - 200e^{0,5}\right) = 40,54$

Interpretation:
Im Zeitraum zwischen 5 und 9 Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt der Flächeninhalt durchschnittlich ca. 40,55 mm².

c) Maximaler Flächeninhalt

Gesucht ist der Hochpunkt des Schaubildes von g.
Notwendige Bedingung: $g'(t) = 0$

Es gilt $g'(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2} \cdot (0,1 - 0,01 \cdot t)$

$20 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2} \cdot (0,1 - 0,01 \cdot t) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): $20 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2} = 0$ besitzt keine Lösung
Gleichung II): $0,1 - 0,01 \cdot t = 0 \Rightarrow t = 10$

Da in der Aufgabe vorgegeben ist, dass der Flächeninhalt ein Maximum besitzt und nur eine Lösung existiert, muss bei t = 10 das lokale Maximum sein.

Die hinreichende Bedingung über die zweite Ableitung muss daher nicht mehr geprüft werden.

Es ist $g(10) = 32{,}97$.
Der maximale Flächeninhalt beträgt ca. 33 mm².

<u>Gleicher Flächeninhalt wie bei Beobachtungsbeginn</u>

Der Flächeninhalt zu Beginn beträgt $g(0) = 20$ mm²

Bedingung: $g(t) = 20$

$20e^{0{,}1\cdot t - 0{,}005\cdot t^2} = 20$
$\Rightarrow e^{0{,}1t - 0{,}005t^2} = 1$
$\Rightarrow 0{,}1t - 0{,}005t^2 = 0$
$\Rightarrow t \cdot (0{,}1 - 0{,}005t) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): t = 0
Gleichung II): $0{,}1 - 0{,}005t = 0 \Rightarrow t = 20$

Nach 20 Stunden ist der Flächeninhalt wieder so groß wie zu Beobachtungsbeginn.

d) Aus der Bedingung $h(-t) = h(t)$ folgt, dass der Graph von h achsensymmetrisch zur y-Achse ist.
Da der Graph von h aus dem Graphen von g durch Verschiebung um 10 nach links (in negative t-Richtung) entsteht, ist der Graph von g achsensymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung t = 10.

Aufgabe A 2.2

a) Bedingung: $f_t(1) = 4$

Es gilt $f_t(1) = 1 - 2t + 8t$
Also folgt $1 - 2t + 8t = 4 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

b) Es ist bereits bekannt, dass bei $x = \sqrt{t}$ ein Tiefpunkt existiert (muss also nicht gezeigt werden).

Es gilt $f(\sqrt{t}) = \sqrt{t}^4 - 2t \cdot \sqrt{t}^2 + 8t = t^2 - 2t \cdot t + 8t = -t^2 + 8t$

Da der Tiefpunkt möglichst hoch liegen soll, muss t so gewählt werden, dass der y-Wert des Tiefpunktes maximal wird.

Gesucht ist der Hochpunkt Hilfsfunktion $g(t) = -t^2 + 8t$.
Hinreichende Bedingung: $g'(t) = 0$ und $g''(t) < 0$

Es gilt $g'(t) = -2t + 8$ und $g''(t) = -2$

$-2t + 8 = 0 \Rightarrow t = 4$

$g''(4) = -2 < 0$ somit existiert ein Maximum für t = 4.

Der Tiefpunkt liegt für t = 4 am höchsten.

c) Zunächst wird der Schnittpunkt von zwei konkreten Schaubildern der Schar berechnet.

Wähle z.B. t = 1 und t = 2:

$f_1(x) = f_2(x)$
$x^4 - 2x^2 + 8 = x^4 - 4x^2 + 16$
$\Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$

Einsetzen der Lösungen in die Funktionenschar:

$f_t(2) = 16 - 8t + 8t = 16$ unabhängig von t
$f_t(-2) = 16 - 8t + 8t = 16$ unabhängig von t

Also gibt es genau zwei Punkte, durch die sämtliche Graphen verlaufen.