Hauptprüfung Abiturprüfung 2019

Baden-Württemberg

Pflichtteil

Hilfsmittel: keine

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2019

Aufgabe 1: (2 VP)

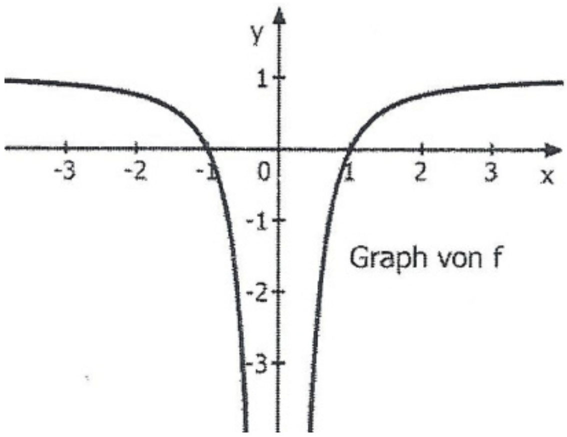
Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^4 \cdot \sin(3x)$.

Aufgabe 2: (2 VP)

Lösen Sie die Gleichung $(\cos(x))^2 + 2\cos(x) = 0$ für $0 \le x \le 2\pi$

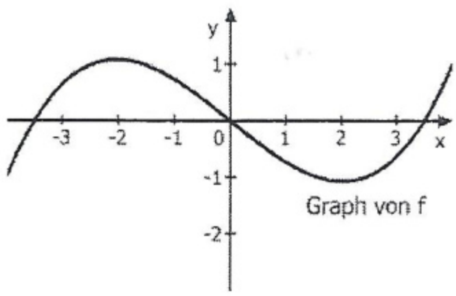
Aufgabe 3: (2,5 VP)

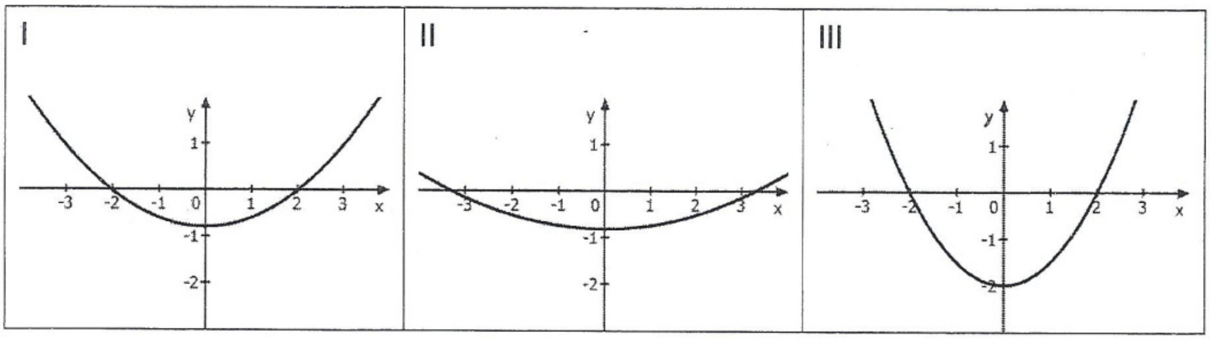
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$,
die die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ hat.
Die Abbildung zeigt den Graphen von f, der symmetrisch bezüglich der y-Achse ist.
Weiterhin ist die Gerade g mit der Gleichung y = -3 gegeben.



a) Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen g den Graphen von f schneidet, die x-Koordinaten $\frac{1}{2}$ hat.
b) Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, die x-Achse und die Gerade g einschließen.

Aufgabe 4: (2,5 VP)

Die Abbildung rechts zeigt den Graphen einer Funktion f. a) Einer der folgenden Graphen I, II und III gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f. Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen.	



b) Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f. Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall [1;3] an. Begründen Sie Ihre Angabe.

Aufgabe 5: (4 VP)

Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ und die Ebene E: $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 14$.

a) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und E.
b) Die Gerade h entsteht durch Spiegelung der Gerade g an der Ebene E.
Bestimmen Sie eine Gleichung von h.

Aufgabe 6: (4 VP)

Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem g die x_2x_3 -Ebene schneidet.
b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P(-3|-1|7) von der Geraden g.

Aufgabe 7: (3 VP)

In einer Urne sind eine rote, eine weiße und drei schwarze Kugeln. Es wird so lange ohne Zurücklegen gezogen, bis man eine schwarze Kugel zieht.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: „Man zieht genau zwei Kugeln".
B: „Unter den gezogenen Kugeln befindet sich die rote Kugel".

Lösungen

Aufgabe 1:

Für die Ableitungsfunktion wird die Kettenregel und Produktregel benötigt:

$f(x) = x^4 \cdot \sin(3x)$
$f'(x) = 4x^3 \cdot \sin(3x) + x^4 \cdot \cos(3x) \cdot 3$

Aufgabe 2:

$(\cos(x))^2 + 2\cos(x) = 0$
Ausklammern von cos(x) ergibt: $\cos(x) \cdot (\cos(x) + 2) = 0$

Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt:
I) $\cos(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}\pi$
II) $\cos(x) + 2 = 0 \Rightarrow \cos(x) = -2$ ist nicht lösbar

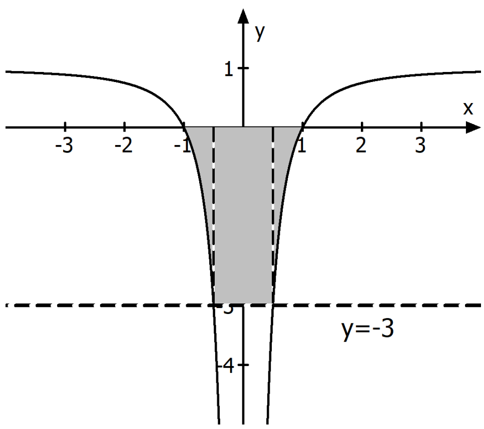
Aufgabe 3:

a) Nachweis, dass der Graph von f die Gerade y = -3 an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ schneidet:

$f(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = 1 - 4 = -3$

Damit liegt der Punkt $P(\frac{1}{2} \mid -3)$ auf dem Graphen von f und auf der Geraden y = -3.

b) Berechnung der Fläche:



Die gesuchte Fläche kann in drei Teile aufgeteilt werden.
Die mittlere Fläche ist ein Rechteck mit dem Inhalt $A_1 = 1 \cdot 3 = 3$

Die linke und die rechte Fläche sind gleich groß.

Berechnung der rechten Fläche:

$$\int_{0,5}^{1} f(x)dx = \int_{0,5}^{1} \left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx = \int_{0,5}^{1} \left(1-x^{-2}\right)dx = \left[x+\frac{1}{x}\right]_{0,5}^{1} = 1+\frac{1}{1}-(0,5+2) = -0,5$$

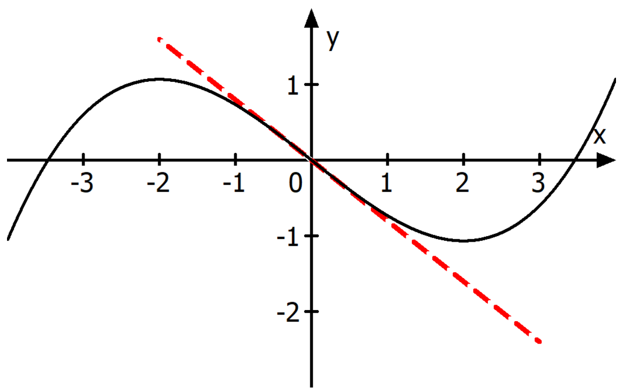
Inhalt der rechten Fläche: $A_2 = 0,5$

Der gesamte Flächeninhalt beträgt $A = A_1 + 2\cdot A_2 = 3 + 2\cdot 0,5 = 4$

Aufgabe 4:

a) Das Schaubild von f besitzt zwei Extremstellen bei x = 2 und bei x = -2.
Somit muss die Ableitungsfunktion an diesen Stellen Nullstellen haben.
Daher kommt Graph II nicht in Frage.

Die Graphen I und III unterscheiden sich beispielsweise durch den y-Wert bei x = 0.
Der y-Wert der Ableitung an der Stelle 0 entspricht der Steigung der Tangente an der Stelle x = 0 an das Schaubild von f.



Zeichnet man die Tangente ein, ergibt sich als Steigung ein Wert größer als -2.
Da also $f'(0) > -2$ ist, kommt Grahp III auch nicht in Frage.
Somit gehört Graph I zur Ableitungsfunktion von f.

b) Im Intervall [1;3] befindet sich die Ableitungsfunktion $F'(x) = f(x)$ unterhalb der x-Achse.
Somit ist F im Intervall [1;3] streng monoton fallend.

Aufgabe 5:

a) Gegenseitige Lage von g und E:

Berechnung eines möglichen Schnittpunktes von g und E:

$$3\cdot(2+t) - 2\cdot 0 + (1-3t) = 14$$
$$\Rightarrow 6 + 3t + 1 - 3t = 14 \Rightarrow 7 = 14$$

Da die Gleichung keine Lösung besitzt, schneiden sich g und E nicht.
Die Gerade und die Ebene sind parallel und haben keine gemeinsamen Punkte.

b) Die Gerade g ist parallel zur Ebene E.
Die gespiegelte Gerade h hat somit denselben Richtungsvektor wie g.

Um einen Punkt der Geraden h zu ermitteln, muss ein Punkt von g an der Ebene E gespiegelt werden.

Spiegelung des Geradenpunktes P(2|0|1) an der Ebene E:

Hilfsgerade durch P, die senkrecht auf E steht: $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt von k mit E: $3 \cdot (2+3s) - 2 \cdot (-2s) + (1+s) = 14$

$\Rightarrow 6 + 9s + 4s + 1 + s = 14 \Rightarrow 14s = 7 \Rightarrow s = 0{,}5$

Einsetzen von s = 0,5 in die Gerade k ergibt den Lotfußpunkt $L(3{,}5 \,|\, -1 \,|\, 1{,}5)$

Berechnung des Spiegelpunktes P*: $\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PL} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Der gespiegelte Punkt hat die Koordinaten P*(5|-2|2).

Die gespiegelte Gerade h hat die Gleichung $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6:

a) Der Schnittpunkt der Gerade g mit der x_2x_3 -Ebene hat die Koordinaten $A(0 \,|\, x_2 \,|\, x_3)$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es gilt $4 + t = 0 \Rightarrow t = -4$
Daraus folgt $x_2 = -6 + 8 = 2$ und $x_3 = 3 - 8 = -5$

Der gesuchte Punkt hat die Koordinaten A(0|2|-5).

b) Abstand des Punktes P(-3|-1|7) von g:

Ein „laufender Punkt" auf g hat die Koordinaten $A(4+t \,|\, -6-2t \,|\, 3+2t)$.

Es gilt $\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 4+t+3 \\ -6-2t+1 \\ 3+2t-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+t \\ -5-2t \\ -4+2t \end{pmatrix}$

Bedingung: $\begin{pmatrix} 7+t \\ -5-2t \\ -4+2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

$7 + t - 2 \cdot (-5 - 2t) + 2 \cdot (-4 + 2t) = 0$
$\Rightarrow 7 + t + 10 + 4t - 8 + 4t = 0$
$\Rightarrow 9t + 9 = 0 \Rightarrow t = -1$

Der Lotfußpunkt hat die Koordinaten A(3|-4|1).

Der gesuchte Abstand beträgt $\left|\overrightarrow{PA}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{36 + 9 + 36} = 9$

Aufgabe 7:

a) P(A) = P(zuerst nicht schwarz, dann schwarz) = $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

b) P(B) = P(rs, rws, wrs) = P(rs) + P(rws) + P(wrs)

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{3}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4}$$