

Hauptprüfung Abiturprüfung 2020

Baden-Württemberg

Stochastik C2

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2020

Aufgabe C2:

In einer Urne befinden sich drei rote, eine weiße und sechs schwarze Kugeln.

- a) Es werden nacheinander acht Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: Genau drei dieser Kugeln sind rot.
B: Mehr als zwei und weniger als sechs dieser Kugeln sind rot.
C: Die ersten drei Kugeln haben dieselbe Farbe.

(3 Punkte)

- b) Geben Sie im Zusammenhang mit der oben beschriebenen Urne ein Zufallsexperiment und ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit sich mit dem folgenden Term berechnen lässt:

$$\binom{5}{3} \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^2$$

(1,5 Punkte)

- c) Bei einem Spiel werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Ist die weiße Kugel dabei, erhält der Spieler seinen Einsatz zurück. Bei zwei Kugeln mit gleicher Farbe erhält er vier Euro ausbezahlt. In allen anderen Fällen gibt es keine Auszahlung. Bestimmen Sie die Höhe des Einsatzes, so dass dieses Spiel fair ist.

(2,5 Punkte)

- d) In einer anderen Urne befinden sich 200 schwarze und fünf rote Kugeln.
Ein Spieler zieht 15-mal nacheinander eine Kugel und legt sie jeweils direkt wieder zurück. Er gewinnt, wenn er mindestens eine rote Kugel zieht.
Berechnen Sie seine Gewinnwahrscheinlichkeit.

Dem Spieler wird folgendes Angebot gemacht. Er kann auf Züge verzichten, dafür werden weitere rote Kugeln in die Urne gelegt. Der Spieler muss vor dem Ziehen erklären, auf wie viele Züge er verzichtet. Für jeden weggelassenen Zug werden zwei rote Kugeln zusätzlich in die Urne gelegt.

Geben Sie einen Term an, mit dem die Gewinnwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Zahl z der weggelassenen Züge berechnet werden kann.

Ermitteln Sie, auf wie viele Züge er verzichten muss, damit seine Gewinnwahrscheinlichkeit am größten ist.

(3 Punkte)

Lösungen

Aufgabe C2:

a) Ereignis A und B

Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der gezogenen roten Kugeln.

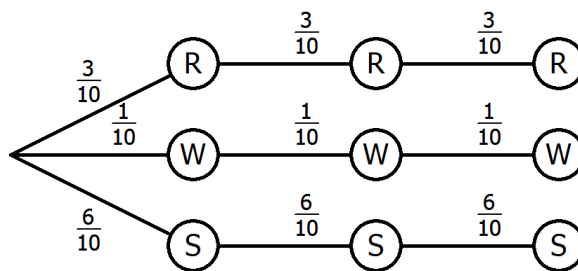
X ist binomialverteilt mit $n = 8$ und $p = \frac{3}{10} = 0,3$

$$P(A) = P(X = 3) \approx 0,254 \quad (\text{WTR})$$

$$P(B) = P(2 < X < 6) = P(X \leq 5) - P(X \leq 2) \approx 0,9887 - 0,5518 = 0,437$$

Ereignis C

Diese Wahrscheinlichkeit kann nicht mit der Binomialverteilung berechnet werden. Man benötigt hierfür ein Baumdiagramm.



$$P(C) = P(rrr) + P(www) + P(sss) = \left(\frac{3}{10}\right)^3 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \left(\frac{6}{10}\right)^3 = 0,244$$

b) Experiment und Ereignis

Der angegebene Term ist die Bernoulli-Formel $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Es gilt $n = 5$, $k = 3$ und $p = 0,6$.

Experiment: Es werden nacheinander fünf Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

Ereignis: Man zieht genau drei schwarze Kugeln.

c) Höhe des Einsatzes

Die Zufallsvariable Y sei die Auszahlung an den Spieler in Euro.

a = Spieleinsatz in Euro

$$P(Y = a) = P(\text{weiße Kugel ist dabei})$$

$$= P(1. \text{ Kugel weiß}) + P(1. \text{ Kugel nicht weiß, 2. Kugel weiß}) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{5}$$

$$P(Y = 4) = P(rr) + P(ss) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{2}{5}$$

Bedingung für ein faires Spiel: $E(Y) = a$

(Erwartungswert von der Auszahlung Y entspricht dem Einsatz)

$$E(Y) = \frac{1}{5} \cdot a + \frac{2}{5} \cdot 4 = a \Leftrightarrow \frac{4}{5}a = \frac{8}{5} \Leftrightarrow a = 2$$

Der Einsatz muss 2 Euro betragen.

d) Gewinnwahrscheinlichkeit

$$P(\text{mindestens eine rote Kugel}) = 1 - P(\text{keine rote Kugel}) = 1 - \left(\frac{200}{205}\right)^{15} \approx 0,31$$

Term

z = Anzahl der weggelassenen Züge

Es werden $15 - z$ Züge durchgeführt.

In der Urne befinden sich $205 + 2z$ Kugeln, davon sind 200 Kugeln schwarz und $5 + 2z$ Kugeln rot.

$$P(\text{mindestens eine rote Kugel}) = 1 - P(\text{keine rote Kugel}) = 1 - \left(\frac{200}{205 + 2z}\right)^{15-z}$$

Anzahl der Züge

Die Gewinnwahrscheinlichkeit $1 - \left(\frac{200}{205 + 2z}\right)^{15-z}$ soll maximal werden.

Gesucht ist der Wert von z mit $z \in \{0, 1, 2, \dots, 15\}$ für den der Term einen möglichst großen Wert annimmt.

Prüfung mit Hilfe des WTR:

Für $z = 6$ ist die Gewinnwahrscheinlichkeit mit 0,520 maximal.

Der Spieler muss auf sechs Züge verzichten, um seine Gewinnwahrscheinlichkeit zu maximieren.