

Hauptprüfung Abiturprüfung 2020

Baden-Württemberg

Stochastik C1

Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2020

Aufgabe C 1

Auf einer Meeresfarm werden Muscheln zur Perlengewinnung gezüchtet. Erfahrungsgemäß bringen 70% der Muscheln keine Perlen hervor. In den restlichen Muscheln befindet sich jeweils genau eine Perle, aber nur 10% der Perlen entsprechen dem geforderten Qualitätsstandard.

- a) Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
- A: In 10 zufällig ausgewählten Muscheln ist keine Perle.
 - B: In 10 zufällig ausgewählten Muscheln sind insgesamt mindestens zwei Perlen.
 - C: In 100 zufällig ausgewählten Muscheln sind insgesamt mehr als drei Perlen, die dem Geforderten Qualitätsstandard entsprechen.
- (3 Punkte)
- b) Ermitteln Sie die Anzahl der Muscheln, die man mindestens öffnen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens eine Perle zu finden ist.
- (2 Punkte)
- c) Ein Muschelzüchter hat eine neue Zuchtmethod entwickelt. Er behauptet, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Muschel eine Perle hervorbringt, zu erhöhen. Um die Behauptung zu überprüfen, wird die Nullhypothese „Mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 30% bringt eine Muschel eine Perle hervor.“ getestet. Man vereinbart einen Stichprobenumfang von 200 Muscheln und ein Signifikanzniveau von 5%. Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel.
- (2,5 Punkte)
- d) Ein Goldschmied hat in einer Schale weiße und schwarze Perlen. Es sind mehr schwarze als weiße Perlen. Insgesamt sind es 21 Perlen. Der Goldschmied zieht zufällig zwei Perlen ohne Zurücklegen aus der Schale. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Farben der beiden Perlen unterscheiden, beträgt $\frac{8}{21}$. Bestimmen Sie die Anzahl der schwarzen Perlen, die vor dem Ziehen in der Schale waren.
- (2,5 Punkte)

Lösungen

Aufgabe C 1:

a) Ereignisse A und B

Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Muscheln, die eine Perle enthalten.
 X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0,3$.

$$P(A) = P(X = 0) \approx 0,028 \quad (\text{WTR})$$

$$P(B) = P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0,851 \quad (\text{WTR})$$

Ereignis C

30% der Muscheln enthalten eine Perle.
 10% der Perlen entsprechen dem geforderten Qualitätsstandard.
 10% von 30% sind 3%.
 Somit enthalten 3% der Muscheln Perlen mit dem geforderten Qualitätsstandard.

Die Zufallsvariable Y sei die Anzahl der Muscheln, die Perlen mit dem geforderten Qualitätsstandard enthalten.
 Y ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0,03$.

$$P(C) = P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) \approx 0,353$$

b) Mindestanzahl der Muscheln

Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der Muscheln, die eine Perle enthalten.
 X ist binomialverteilt mit $p = 0,3$ und unbekanntem Parameter n .

Gesucht ist der kleinste Wert von n , so dass gilt: $P(Y \geq 1) \geq 0,95$

$$\Leftrightarrow 1 - P(Y = 0) \geq 0,95$$

$$\Leftrightarrow P(Y = 0) \leq 0,05$$

WTR:

Für $n = 8$ ergibt sich $P(Y = 0) \approx 0,058$

Für $n = 9$ ergibt sich $P(Y = 0) \approx 0,040$

Man muss mindestens neun Muscheln öffnen.

c) Entscheidungsregel

Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der Muscheln, die eine Perle enthalten.

Nullhypothese $H_0 : p \leq 0,3$

Gegenhypothese: $H_1 : p > 0,3$

X ist im Extremfall binomialverteilt mit $n = 200$ und $p = 0,3$.

Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test mit Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$.

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{g, g+1, \dots, n\}$

Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl g , für die gilt: $P(X \geq g) \leq \alpha$

$\Rightarrow P(X \leq g-1) \geq 0,95$

Es gilt $P(X \leq 70) \approx 0,946$ und $P(X \leq 71) \approx 0,96$

Es gilt $g-1 = 71 \Rightarrow g = 72$

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{72, \dots, 200\}$

Entscheidungsregel:

Wenn mindestens 72 Muscheln eine Perle enthalten, so wird die Nullhypothese abgelehnt, ansonsten kann sie nicht abgelehnt werden.

d) Anzahl der schwarzen Perlen

x = Anzahl der schwarzen Perlen in der Schale vor dem Ziehen

$21 - x$ = Anzahl der weißen Perlen in der Schale vor dem Ziehen

$P(1.\text{Perle schwarz, } 2.\text{Perle weiß}) + P(1.\text{Perle weiß, } 2.\text{Perle schwarz})$

$$= \frac{x}{21} \cdot \frac{21-x}{20} + \frac{21-x}{21} \cdot \frac{x}{20}$$

$$\text{Bedingung: } \frac{x}{21} \cdot \frac{21-x}{20} + \frac{21-x}{21} \cdot \frac{x}{20} = \frac{8}{21} \quad | \cdot 21 \cdot 20$$

$$\Rightarrow x \cdot (21-x) + (21-x) \cdot x = 160$$

$$\Leftrightarrow 21x - x^2 + 21x - x^2 = 160$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 42x - 160 = 0 \quad | : (-2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 21x + 80 = 0$$

$$\text{abc-Formel: } x_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 4 \cdot 80}}{2} = \frac{21 \pm 11}{2}$$

$$x_1 = 16 \quad \text{und} \quad x_2 = 5$$

Zu Beginn waren 16 schwarze Perlen (und 5 weiße Perlen) in der Schale (da zu Beginn mehr schwarze als weiße Perlen in der Schale waren).